Physik Methoden
Übungsaufgaben zu Kapitel 8 „Messungen und Auswertung“

Christian Hettich, Bernd Jödicke, Jürgen Sum

11. April 2024

In diesem Dokument finden Sie Aufgaben zum Kapitel 8 „Messungen und Auswertung“ aus unserem Buch Physik Methoden. Wenn Sie die PDF-Datei des Buchs ins gleiche Verzeichnis wie diese Datei hier legen und Sie die PDF-Datei des Buchs in „Physik-Methoden-2023.pdf“ umbenennen, können Sie mit den grünen Links in den meisten PDF-Programmen direkt an die passende Stelle im Buch springen.

Inhaltsverzeichnis

Lerneinheit zum Umgang mit Messunsicherheiten

Die folgende Lerneinheit soll helfen, innerhalb kurzer Zeit einen vollständigen Überblick über die Anwendung der Methoden zur Auswertung von Wiederholungsmessungen, das Angeben von Messergebnissen und die Optimierung von Messaufbauten zu erlangen.

Arbeitshinweis: Bei der vorliegenden Einheit kann es hilfreich sein, die bereits bearbeiteten Spiegelpunkte zu markieren. Sie werde so Schritt für Schritt durch das Kapitel 8 geführt und mit den nötigen Informationen und Übungsaufgaben versorgt.

Lektion 1: Auswertung von Wiederholungsmessungen

- Überfliegen Sie das gesamte Kapitel 8 des Buchs. Dabei sollen Sie die wichtigsten Grundideen erfassen. Sie müssen noch nicht alle Details verstanden haben.
- Danach bearbeiten Sie detailliert die Unterkapitel 8.1 und Unterkapitel 8.2. Sie benötigen einen Taschenrechner oder einen Computer.
  - Lesen:

  * Rezept 8.1.5 und Beispiel 8.1.ii genau ansehen.
  * Rezept 8.1.6 und Rezept 8.1.7 anstreichen und merken für den Fall, dass Sie später einmal einen Laborversuch durchführen.
  * In Unterkapitel 8.2 „Wiederholungsmessungen“ Einleitung und Abschnitt 8.2.a durchlesen und merken.
  * Und Abschnitt 8.2.a, Abschnitt 8.2.c, Abschnitt 8.2.d intensiv bearbeiten (siehe Folgepunkte).
- Berechnen Sie Mittelwert der Breite des Sofas Unterkapitel 8.2 unter Verwendung von PC oder Taschenrechner. Das Ergebnis finden Sie am Ende von Abschnitt 8.2.d.
- Berechnen Sie die gesamte Unsicherheit bei der Sofafrage (Abschnitt 8.2.e und Abschnitt 8.2.f).
- Stellen Sie das Ergebnis dar (Abschnitt 8.2.g, dort auch die Lösung).

Bisher sind die Lösungen direkt im Text angegeben. Sie sollen trotzdem vor allen Dingen die einzelnen Schritte wirklich selbst durchführen.

- Jetzt sollen Sie das Erlernte anwenden:
  * Zu Rezept 8.2.11 und Beispiel 8.2.ii lösen Sie Aufgabe 1.
  * Zu Rezept 8.4.1 und dem Beispiel in Unterkapitel 8.4 rechnen Sie die Auswertung der Massemessung nach und versuchen Sie auch die Kantenlänge zu bestimmen (mit Unsicherheiten).
  * Lösen Sie von Aufgabe 5 den Aufgabenteil 1.

Lektion 2: Auswertung einer Kombination vom Messreihen – Kombination von Unsicherheiten

- Lesen Sie dazu nochmal das gesamte Unterkapitel 8.3. Abschnitt 8.3.a, Abschnitt 8.3.b und Abschnitt „Unsicherheit bei einer Messgröße“ in 8.3.c dienen der Vorbereitung von Abschnitt „Unsicherheit bei mehreren Messgrößen“ in 8.3.c.

  Im ersten Schritt müssen Sie die „partiellen Ableitungen“ noch nicht selbst ausrechnen können. Das wird später wiederholt und vertieft. Es genügt, wenn Sie das Prinzip von Abbildung 8.7 verstanden haben.
- Nachvollziehen — Bearbeiten Sie detailliert:
  - Rezept 8.3.1, mit dem Beispiel 8.3.i genau ansehen. Das ist wichtig und die größte Fehlerquelle für folgende Arbeiten.
  - Einleitung und Abschnitt „Schnellformel“ in 8.3.d genau durcharbeiten. Um das geht es im Folgenden. Insbesondere Rezept 8.3.8 mit dem Beispiel 8.3.ii.
  - Abschnitt „Addition oder andere funktionale Zusammenhänge in der Gleichung“ in 8.3.d überspringen.
  - Danach Rezept 8.4.2 durchlesen. Achten Sie auf den Schritt 10. Das ist wieder ein Hinweis auf die größte Fehlerquelle. Arbeiten Sie das Beispiel in Unterkapitel 8.4 durch. Versuchen Sie jeden Schritt zu verstehen.
- neues Rechnen — Jetzt sollen Sie das Erlernte anwenden:
  - Nutzen Sie das zusammenfassende Rezept 8.4.2.
  - Lösen Sie die Aufgabe 2 Teil 2 und 3

    (Hinweis: auch hierzu gibt es Lösungen, diese aber bitte erst anschauen, nachdem Sie die Aufgabe selbst gelöst haben.)
  - Lösen Sie von Aufgabe 5 die Teilaufgaben 2b und c

Sie müssen Ihre Auswertung nicht ausführlicher dokumentieren als in den Musterlösungen zu Aufgabe 2.

1 Aufgaben

1.a Darstellung von Messergebnissen

Aufgabe 1: Darstellung von Messergebnissen

Sie haben aus dem Taschenrechner folgende Werte erhalten. Stellen Sie jeweils das Ergebnis richtig dar:

$$\begin{array}{rcl} t = 0{,}23442\,\mathrm{s} & \text{mit} & \boldsymbol{u}(t) = 0{,}059573\,\mathrm{s} \\ m = 273345{,}22\,\mathrm{kg} & \text{mit} & \boldsymbol{u}(m) = 5522{,}21\,\mathrm{kg} \\ U = 62\,\mathrm{mV} & \text{mit} & \boldsymbol{u}(U) = 0{,}0029773\,\mathrm{V} \\ T = 23{,}44\,\mathrm{\mu K} & \text{mit} & \boldsymbol{u}((T)) = 0{,}089722\,\mathrm{K} \end{array}$$

Zum Hinweis

1.b Auswertung von Messungen

Hinweis:
Eigentlich ist in den folgenden Aufgaben die Stichprobe zu klein (siehe Rezept 3.2.4). Für Übungszwecke ist das aber in Ordnung, denn größere Datensätze erhöhen nur den Rechenaufwand, ohne das Verständnis zu fördern.

Aufgabe 2: Dichtemessung einer Kugel

Die Dichte ϱ eines Materials soll bestimmt werden. Dazu steht eine Vollkugel aus diesem Material zur Verfügung. Die Masse der Kugel wurde bestimmt zu $m = (3{,}15 \pm 0{,}10)$ kg. Eine Messreihe für den Kugeldurchmesser d ergab (in cm):

7,1	7,2	7,1	7,0	6,9	7,2
7,1	7,1	7,0	7,0	7,0	7,2

Gemessen wurde mit einem Geodreieck und daher die Typ-B Unsicherheit geschätzt zu $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(t) = 0{,}2$ cm.

1. Bestimmen Sie den Durchmesser und geben Sie das Ergebnis in der Form $\langle d\rangle \pm \boldsymbol{u}(d)$ an.
2. Bestimmen Sie die Dichte des Materials und geben Sie das Ergebnis an.
3. Welche Messung müsste man als erstes verbessern? (Begründung)

Zum Hinweis

Aufgabe 3: Kondensator

Eine Spule und ein Kondensator in Reihe geschaltet ergeben einen Schwingkreis. Dessen Eigenfrequenz f kann einfach gemessen werden. Es gilt der Zusammenhang:

$$f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1}{L\,C}}.$$

Durch Messen der Frequenz und der Kapazität C soll die Induktivität L bestimmt werden. Als Kapazität dient ein Plattenkondensator gefüllt mit einen Isolator mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_r. Es gilt:

$$C = \epsilon_0\,\epsilon_r\,\frac{A}{d}.$$

Dabei bedeuten	Induktivität	$L =$	gesucht
	Kapazität	$C =$	siehe Formel
	Fläche	$A =$	$(120{,}2 \pm 1{,}2)\ \mathrm{cm}^2$
	Abstand	$d =$	$(1{,}020 \pm 0{,}010)\ \mathrm{mm}$
		$\epsilon_r =$	(1200 ± 31)
	Feldkonstante	$\epsilon_0 =$	$8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{Vm}}$

Zur Bestimmung der Frequenz wurde die Zeit t für $N = 10^6$ Schwingungen gemessen.

Frequenz $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{N}{t}$ Die Messreihe für die Zeit t (in s) ergab:

84,0	83,8	84,1	83,6	83,9	84,0
44,3	84,1	84,4	84,2	83,9	43,9

Die Typ-B Unsicherheit betrage $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(t) = 0{,}13\,\mathrm{s}$

1. Bestimmen Sie die Zeit t und geben Sie das Ergebnis in der Form $\langle t\rangle \pm \boldsymbol{u}(t)$ an.
2. Bestimme die Induktivität L und geben Sie das Ergebnis an.
3. Welche Messung müsste man als erstes verbessern? (Begründung)

Zum Hinweis

Aufgabe 4: Dichte-aus-Massenträgheit

Diese Aufgabe kann ohne die Zuhilfenahme eines Taschenrechners bearbeitet werden.

In einer Maschine werden metallische Zylinder gefertigt. Deren Dichte ϱ soll bestimmt werden. Es gilt:

$$J = \frac{\varrho\,\ell\,A^2}{2\pi}.$$

Trägheitsmoment	J	$=$	$(3{,}26 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg\ m^2}$
Höhe des Zylinders	ℓ	$=$	$(9{,}702 \pm 0{,}010)\ \mathrm{cm}$
Kreisfläche Zylinder $A = \pi r^2$			
Durchmesser Zylinder	d	$=$	$(17{,}52 \pm 0{,}64)\ \mathrm{mm}$

1. Wie lautet die Gleichung zur Bestimmung der Dichte?
2. Wie lautet die Gleichung zur Bestimmung der Unsicherheit der Dichte?
3. Prüfen Sie explizit nach, ob die Einheit passt.
4. Welche Messung müssten Sie als erste verbessern? Begründung!

Ihr Taschenrechner liefert Ihnen (nachdem Sie alles in die SI-Basis-Einheit umgerechnet haben):
Bestwert $\varrho = 3632{,}62049$ und $\boldsymbol{u}(\varrho)= 542{,}37699$.

5. Wie lautet das Ergebnis zur Messung der Dichte?

Zum Hinweis

Aufgabe 5: Messung Luftdichte

Die Dichte der Luft ϱ soll auf einfache Weise über die erreichte Höchstgeschwindigkeit eines Autos bestimmt werden. Dabei fährt der PkW eine Strecke b von exakt einem Kilometer, $= 1$ km, mit konstanter Geschwindigkeit. Die Zeit τ wird gemessen. Es gilt in diesem Sonderfall $v = \frac{b}{\tau}$.

Grundlage der Messung ist:

$$P = \frac{1}{2}\, c_W\, A\, \varrho\, v^3.$$

Die Variablen haben folgende Bedeutung und Werte:

Widerstandsbeiwert	$c_W = (0{,}321 \pm 0{,}033)$
Leistung	$P = (52{,}2 \pm 2{,}7)$ kW
Querschnittsfläche des Autos	$A = 1{,}62\,\mathrm{m}^2$ (ohne Unsicherheit)
Geschwindigkeit	$v = \frac{b}{\tau}$
zurückgelegter Weg	$b = 1{,}0000$ km (ohne Unsicherheit)
Zeit für den Weg	τ : Messreihe
Dichte Luft	ϱ : gesucht.

Messung der Fahrzeit

Eine Messreihe für τ ergab folgende Werte (in Sekunden):

18,1	18,2	28,9	18,1	18,1	18,0
18,1	18,2	18,3	18,1	17,9	18,0

Die Typ-B-Unsicherheit wird geschätzt zu $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(\tau) = 0{,}06$ s.

1. Bestimmen Sie den Messwert und die Unsicherheit von τ und geben Sie das Ergebnis an.
2. Bestimmen Sie den Wert und die Unsicherheit der Luftdichte ϱ und geben Sie das Ergebnis an.
3. Welche Messung würden Sie als erste verbessern? (Mit Begründung)

Zum Hinweis

Aufgabe 6: Massenträgheitsmoment

Das Massenträgheitsmoment Θ um eine Achse soll (auf zugegebenermaßen sehr seltsame, aber immerhin lehrreiche Art) bestimmt werden, indem man den Körper um die zu bestimmende Achse rotieren lässt. Man bestimmt die Winkelgeschwindigkeit ω, indem man die Zeit τ für 100 Umdrehungen misst. Danach wird der Körper durch Reibung im Wasserbad (ein Würfel der Kantenlänge a) abgebremst. Aus der Temperaturänderung ΔT des Wassers kann anschließend der Wert für Θ_S bestimmt werden:

Grundlage der Messung ist:

$$\frac{1}{2}\Theta\,\omega^2 = c_W\,m_W\,\Delta T$$

mit $\omega = \dfrac{2\,\pi\,N}{\tau}$, da der Körper mit konstanter Drehzahl rotiert.

Die Variablen haben folgende Bedeutung und Werte:

Massenträgheitsmoment		Θ	$=$	gesucht
Winkelgeschwindigkeit		ω	:	aus Zeit für 100 Umdrehungen
Anzahl Umdrehungen		N	$=$	100 (ohne Unsicherheit)
Zeit für 100 Umdrehungen		τ	$=$	$(1{,}060 \pm 0{,}010)$ s
spez. Wärmekapazität Wasser	konstant	c_W	$=$	$4{,}18\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$
Masse Wasser		m_W	$=$	ϱ_W/V
Dichte Wasser	konstant	ϱ_W	$=$	$1 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Volumen Wasserbad		V	:	ist ein Würfel
Kantenlänge Würfel		a	$=$	$(31{,}3 \pm 0{,}1)$ mm
Temperaturunterschied		ΔT	:	Messreihe

Messung des Temperaturunterschieds ΔT

Eine Messreihe ergab folgende Werte (in K (Kelvin)):

54	56	32	57	53	54
54	56	56	57	56	52

Die Typ-B-Unsicherheit wird geschätzt zu $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(\Delta T) = 0{,}6\,\text{K}$.

1. Bestimmen Sie den Messwert und die Unsicherheit von ΔT und geben Sie das Ergebnis an.
2. Bestimmen Sie den Wert und die Unsicherheit der Luftdichte Θ und geben Sie das Ergebnis an.
3. Welche Messung würden Sie als erste verbessern? (Mit Begründung)

Zum Hinweis

1.c Kombination Unsicherheiten mit Addition

Aufgabe 7: Volumenbestimmung

Bei einem Experiment soll das Volumen V eines besonderen Aufbaus indirekt bestimmt werden. Es gilt:

$$B = V - s\,R^2$$

Dabei seien V und R feste, aber unbekannte Eigenschaften des Aufbaus und:

$$B = \frac{m\,s\,\pi}{\varrho\,R}$$

mit konstanter Dichte ϱ sowie den Messgrößen: Abstand s, Radius R und Masse m. Alle Messgrößen können nur Werte größer null haben! Gesucht ist das Volumen V.

1. Stellen Sie die Gleichung auf mittels der man aus den Messgrößen den Wert für V bestimmen kann.
2. Wie gehen die Unsicherheiten der Messgrößen in die Unsicherheit von V ein? (Führen Sie die Kombination der Unsicherheiten durch, falls nötig geschickt erweitern.) Berechnen Sie nun die Teil-Unsicherheiten von V, also $\boldsymbol{u}_m(V)$, $\boldsymbol{u}_R(V)$ und $\boldsymbol{u}_s(V)$.
3. Stellen Sie dann die Gleichung auf für relative Unsicherheit von V, also für $\dfrac{\boldsymbol{u}(V)}{V}$.
4. Markieren Sie die Gewichtungsfaktoren. Stellen Sie diese allein als Funktionen der Größen V, s und R dar (auch m ersetzen).
5. Wenn die Messung der Masse m den größten Beitrag zur Gesamtunsicherheit liefert, machen Sie einen Vorschlag, wie man den optimalen Abstand als Funktion von V und r einstellen sollte.

Zum Hinweis

Aufgabe 8: Strömungsgeschwindigkeit

Die Strömungsgeschwindigkeit v soll indirekt bestimmt werden. Es gilt:

$$u = c - v$$

Dabei werden die Relativgeschwindigkeit u und die Absolutgeschwindigkeit c aus unterschiedlichen Messungen bestimmt. Für die folgenden Überlegungen gelten die (fiktiven) physikalischen Gesetze für diese Größen:

$$u = A\,\frac{f^2\,\tau}{s} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{g}{f}$$

mit konstanter Gravitationsfeldstärke g, konstanter Fläche A sowie den Messgrößen: Frequenz f, Zeit τ und Strecke s. Alle Messgrößen können nur Werte größer null haben. Gesucht ist die Geschwindigkeit v.

1. Stellen Sie die Gleichung auf mittels der man aus den Messgrößen den Wert für v bestimmen kann.
2. Wie gehen die Unsicherheiten der Messgrößen in die Unsicherheit von v ein? (Führen Sie die Kombination der Unsicherheiten durch, falls nötig geschickt erweitern.) Berechnen Sie nun die Teil-Unsicherheiten von v, also $\boldsymbol{u}_f(v)$, $\boldsymbol{u}_\tau(v)$ und $\boldsymbol{u}_s(v)$.
3. Stellen Sie dann die Gleichung auf für relative Unsicherheit von v, also für $\dfrac{\boldsymbol{u}(v)}{v}$.
4. Markieren Sie die Gewichtungsfaktoren. Stellen Sie diese allein als Funktionen der Größen v, und c dar (auch u ersetzen).
5. Wenn die Messung der Frequenz f den größten Beitrag zur Gesamtunsicherheit liefert, machen Sie einen Vorschlag, wie man v und c optimal zueinander einstellen sollte.

Zum Hinweis

Aufgabe 9: Volumen eines Rohrs

Das Volumen V eines Hohl-Zylinders soll gemessen werden. Dazu werden die Durchmesser a des Außenzylinders und der Bohrung b sowie die Höhe des Zylinders h gemessen. Das Volumen eines beliebigen Zylinders kann aus dessen Durchmesser d und seiner Höhe h berechnet werden:

$$V = \frac{\pi\, d^2\, h}{4} \quad .$$

Damit ergibt sich das Volumen des Hohlzylinders V aus der Differenz zwischen Außenvolumen V_a und Innenvolumen V_b:

$$V = V_a - V_b \quad .$$

Die Messgrößen sind: Durchmesser a des Außenzylinders und der Bohrung b sowie die Höhe des Zylinders h. Gesucht ist das Volumen des Rohres V.

1. Stellen Sie die Gleichung auf, mittels der man aus den Messgrößen den Wert für V bestimmen kann.
2. Wie gehen die Unsicherheiten der Messgrößen in die Unsicherheit von v ein? (Führen Sie die Kombination der Unsicherheiten durch, falls nötig geschickt erweitern.) Berechnen Sie nun die Teil-Unsicherheiten von V, also $\boldsymbol{u}_h(V)$, $\boldsymbol{u}_a(V)$ und $\boldsymbol{u}_b(V)$.
3. Stellen Sie dann die Gleichung auf für relative Unsicherheit von V, also für $\frac{\boldsymbol{u}(V)}{V}$.
4. Markieren Sie die Gewichtungsfaktoren. Stellen Sie diese allein als Funktionen der Größen V_a, und V_b dar (auch V in den Gewichtungsfaktoren ersetzen).
5. Wann wird die Messung besonders ungenau? Betrachten Sie hierfür die Vorfaktoren und denken Sie daran, dass $V_a > V_b \geq 0$ ist.

Zum Hinweis

2 Hinweise

2.a Darstellung von Messergebnissen

Hinweis 1 zu Aufgabe 1 „Darstellung von Messergebnissen“

Beachten Sie Rezept 8.2.11 und Beispiel 8.2.ii.

Zur Lösung

2.b Auswertung von Messungen

Hinweis 2 zu Aufgabe 2 „Dichtemessung einer Kugel“

Falls nötig Unterkapitel 8.4 „Zusammenfassung zum Auswerten von Messungen“ mit Rezept 8.4.1, Rezept 8.4.2 und dem dazugehörigen Beispiel in Unterkapitel 8.4 anschauen.

Zur Lösung

Hinweis 3 zu Aufgabe 3 „Kondensator“

Falls nötig Unterkapitel 8.4 „Zusammenfassung zum Auswerten von Messungen“ mit Rezept 8.4.1, Rezept 8.4.2 und dem dazugehörigen Beispiel in Unterkapitel 8.4 anschauen.

Zur Lösung

Hinweis 4 zu Aufgabe 4 „Dichte-aus-Massenträgheit“

1. -
2. Siehe Rezept 8.3.8 und Beispiel 8.3.ii
3. Siehe Abschnitt 2.4.a
4. Siehe Abschnitt 8.5
5. Siehe Rezept 8.2.11 und Beispiel 8.2.ii

Zur Lösung

Hinweis 5 zu Aufgabe 5 „Messung Luftdichte“

Wenden Sie Rezept 8.4.1 an. Sie benötigen die Schritte ab Punkt 4. Danach verwenden Sie Rezept 8.4.2. Orientieren Sie sich an Unterkapitel 8.4.

Zur Lösung

Hinweis 6 zu Aufgabe 6 „Massenträgheitsmoment“

Wenden Sie Rezept 8.4.1 an. Sie benötigen die Schritte ab Punkt 4. Danach verwenden Sie Rezept 8.4.2. Orientieren Sie sich an Unterkapitel 8.4.

Zur Lösung

2.c Kombination Unsicherheiten mit Addition

Hinweis 7 zu Aufgabe 7 „Volumenbestimmung“

Falls nötig Abschnitt 8.3.d „Addition oder andere funktionale Zusammenhänge in der Gleichung“ mit dem dazugehörigen Beispiel 8.3.iii anschauen.

Zur Lösung

Hinweis 8 zu Aufgabe 8 „Strömungsgeschwindigkeit“

Falls nötig Abschnitt 8.3.d „Addition oder andere funktionale Zusammenhänge in der Gleichung“ mit dem dazugehörigen Beispiel 8.3.iii anschauen.

Zur Lösung

Hinweis 9 zu Aufgabe 9 „Volumen eines Rohrs“

Falls nötig Abschnitt 8.3.d „Addition oder andere funktionale Zusammenhänge in der Gleichung“ mit dem dazugehörigen Beispiel 8.3.iii anschauen.

Zur Lösung

3 Lösungen

3.a Darstellung von Messergebnissen

Lösung [1] zu **Aufgabe 1 „Darstellung von Messergebnissen“**

$$
\begin{aligned}
t &= (234 \pm 60) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = (234 \pm 60)\,\mathrm{ms} \\
m &= (273{,}3 \pm 5{,}6) \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg} \\
U &= (62{,}0 \pm 3{,}0)\,\mathrm{mV} = (62{,}0 \pm 3{,}0) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V} \\
T &= (0 \pm 90) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K} = (0 \pm 90)\,\mathrm{mK}
\end{aligned}
$$

3.b Auswertung von Messungen

Lösung [2] zu **Aufgabe 2 „Dichtemessung einer Kugel“**

Zur Berechnung der Zahlenwerte wurde ein Taschenrechner benutzt.

1. • Messfehler: alle Messwerte sind nutzbar (keine Ausreißer)
   - $\langle d \rangle = 7{,}075\,\mathrm{cm}$
   - $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-A}}(d) = \frac{s}{\sqrt{N}} = 0{,}02786\,\mathrm{cm}$
   - $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(d) = 0{,}2\,\mathrm{cm}$, geschätzt (Geodreieck)
   - $\boldsymbol{u}(d) = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}02786^2}\,\mathrm{cm} = 0{,}2019\,\mathrm{cm}$
   - $d = (7{,}08 \pm 0{,}21)\,\mathrm{cm}$ (auf zwei signifikante Stellen, also auf 0,01 cm gerundet)
2. • $\varrho = \frac{m}{V} = \frac{6\,m}{\pi\,d^3}$ (Funktion nur von Messgrößen, Kugelvolumen $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$)
   - $\langle \varrho \rangle = 16951\,\mathrm{kg/m^3}$
   - $$\begin{aligned}\left(\frac{\boldsymbol{u}(\varrho)}{\varrho}\right)^2 &= \left(\frac{\boldsymbol{u}(m)}{m}\right)^2 + \left(3\,\frac{\boldsymbol{u}(d)}{d}\right)^2 \\ &= \left(\frac{0{,}10}{3{,}15}\right)^2 + \left(3\,\frac{0{,}21}{7{,}08}\right)^2 \\ &= 0{,}03175^2 + 0{,}08898^2\end{aligned}$$
   - $\frac{\boldsymbol{u}(\varrho)}{\varrho} = 0{,}09448$
   - $\boldsymbol{u}(\varrho) = 0{,}09448 \cdot 16951\,\mathrm{kg/m^3} = 1601{,}5\,\mathrm{kg/m^3}$
   - $\varrho = (17000 \pm 1700)\,\mathrm{kg/m^3}$
     $= 170\,(17) \cdot 10^2\,\mathrm{kg/m^3}$ (zwei sign. Stellen, also auf $100\,\mathrm{kg/m^3}$ genau)
3. Die Messung des Durchmessers d müsste man als erstes verbessern, da sie mit 0,089 den größten Anteil an der Gesamtunsicherheit hat.

L3ösung zu Aufgabe 3 „Kondensator“

Zur Berechnung der Zahlenwerte wurde ein Taschenrechner benutzt.

1. • Zwei Messfehler (44,3 s und 43,9 s)
   • $\langle t \rangle = 84\,\mathrm{s}$
   • $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-A}}(t) = \dfrac{s}{\sqrt{N}} = 0{,}06992\,\mathrm{s}$
   • $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(t) = 0{,}13\,\mathrm{s}$
   • $\boldsymbol{u}(t) = \sqrt{0{,}13^2 + 0{,}06992^2}\,\mathrm{s} = 0{,}1476\,\mathrm{s}$
   • $t = (84{,}00 \pm 0{,}15)\,\mathrm{s}$
   $= 84{,}00\,(15)\ \mathrm{s}$ (auf zwei signifikante Stellen, also auf 0,01 s gerundet)
2. • $L = \dfrac{1}{4\pi^2\,C\,f^2} = \dfrac{d\,t^2}{4\pi^2\,\epsilon_0\,\epsilon_r\,A\,N^2}$ (Funktion nur von Messgrößen)
   $\langle L \rangle = 1{,}42749 \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}$
   • $$\left(\frac{\boldsymbol{u}(L)}{L}\right)^2 = \left(\frac{\boldsymbol{u}(d)}{d}\right)^2 + \left(2\,\frac{\boldsymbol{u}(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{u}(\epsilon_r)}{\epsilon_r}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{u}(A)}{A}\right)^2$$
   $$= \left(\frac{0{,}01}{1{,}02}\right)^2 + \left(2\,\frac{0{,}15}{84}\right)^2 + \left(\frac{31}{1200}\right)^2 + \left(\frac{1{,}2}{120{,}2}\right)^2$$
   $$= 0{,}0098^2 + 0{,}0036^2 + 0{,}0258^2 + 0{,}01^2$$
   • $\dfrac{\boldsymbol{u}(L)}{L} = 0{,}02960$
   • $\boldsymbol{u}(L) = 0{,}02960 \cdot 1{,}42749 \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}$
   $= 0{,}04225 \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}$
   • $L = (1{,}427 \pm 0{,}043) \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}$
   $= 1{,}427\,(43) \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}$
3. Die Messung von ϵ_r sollte als erstes verbessert werden, da sie mit 0,0258 den größten Anteil an der Gesamtunsicherheit hat.

L4ösung zu Aufgabe 4 „Dichte-aus-Massenträgheit“

1. Die Gleichung für ϱ:
   $$\varrho = \frac{2\pi\,J}{\ell\,(\pi\,r^2)^2} = \frac{32\,J}{\pi\,\ell\,d^4}$$
2. Die relative Unsicherheit von ϱ kann über die „Schnellformel“ berechnet werden.
   $$\left(\frac{\boldsymbol{u}(\varrho)}{\varrho}\right)^2 = \left(4\,\frac{\boldsymbol{u}(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{u}(\ell)}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{u}(J)}{J}\right)^2$$
3. Dimensionen müssen passen:
   • $\dim J = \mathsf{M\,L}^2$

- $\dim \varrho = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}$
- $\dim \ell = \mathsf{L}$
- $\dim d = \mathsf{L}$

Daher wird der Bruch $\frac{32\,J}{\pi\,\ell\,d^4\,\varrho}$ dimensionslos. Also passt das.

4. $$\left(\frac{\boldsymbol{u}(\varrho)}{\varrho}\right)^2 = \left(4\,\frac{0{,}64}{17{,}52}\right)^2 + \left(\frac{0{,}010}{9{,}702}\right)^2 + \left(\frac{0{,}10}{3{,}26}\right)^2 \approx 0{,}14^2 + 0{,}001^2 + 0{,}03^2$$

   Der Durchmesser hat bei Weitem den größten Anteil an der Gesamtunsicherheit.

5. Die Unsicherheit $\boldsymbol{u}(\varrho)$ wird auf zwei signifikante Stellen aufgerundet: $\boldsymbol{u}(\varrho) = 550\,\mathrm{kg/m^3}$.

   Damit lautet das Ergebnis: $\varrho = (3630 \pm 550)\,\mathrm{kg/m^3}$ oder $\varrho = (3{,}63 \pm 0{,}55)\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

Lösung 5 zu Aufgabe 5 „Messung Luftdichte“

Zur Berechnung der Zahlenwerte wurde ein Taschenrechner benutzt.

1. - Ein Messfehler (28,9 s)
   - $\langle\tau\rangle = 18{,}1\,\mathrm{s}$
   - $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-A}}(\tau) = \frac{s}{\sqrt{N}} = 0{,}0330289\,\mathrm{s}$
   - $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(\tau) = 0{,}06\,\mathrm{s}$
   - $\boldsymbol{u}(\tau) = \sqrt{0{,}06^2 + 0{,}0330289^2}\,\mathrm{s} = 0{,}06849\,\mathrm{s}$
   - $\tau = (18{,}100 \pm 0{,}069)\,\mathrm{s}$
     $= 18{,}100\,(69)\,\mathrm{s}$ (auf zwei signifikante Stellen, also auf 0,001 s gerundet)

2. - $\rho = \frac{2\,P}{c_W\,A\,v^3} = \frac{2\,P\tau^3}{c_W\,A\,b^3} = \frac{2\cdot 52{,}2\cdot 10^3\,\mathrm{W}\cdot(18{,}1\,\mathrm{s})^3}{0{,}321\cdot 1{,}62\,\mathrm{m}^2\cdot(10^3\,\mathrm{m})^3}$ (Funktion nur von Messgrößen)

     $\langle\rho\rangle = 1{,}19046\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
   - $$\left(\frac{\boldsymbol{u}(\rho)}{\rho}\right)^2 = \left(3\,\frac{\boldsymbol{u}(\tau)}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{u}(c_W)}{c_W}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{u}(P)}{P}\right)^2 = \left(3\,\frac{0{,}069}{18{,}100}\right)^2 + \left(\frac{0{,}033}{0{,}321}\right)^2 + \left(\frac{2{,}7}{52{,}2}\right)^2 = 0{,}0144^2 + 0{,}10280^2 + 0{,}05172^2$$
   - $\frac{\boldsymbol{u}(\rho)}{\rho} = 0{,}11565$
   - $\boldsymbol{u}(\rho) = 0{,}11565\cdot 1{,}19046\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 0{,}137676\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
   - $L = (1{,}19 \pm 0{,}14)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1{,}19\,(14)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

3. Die Messung von c_W sollte als erstes verbessert werden, da sie mit 0,1028 den größten Anteil an der Gesamtunsicherheit hat.

L6 Lösung zu Aufgabe 6 „Massenträgheitsmoment“

Zur Berechnung der Zahlenwerte wurde ein Taschenrechner benutzt.

1.
   - Ein Messfehler (32 K)
   - $\langle \Delta T \rangle = 55\,\mathrm{K}$
   - $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-A}}(\Delta T) = \dfrac{s}{\sqrt{N}} = 0{,}504525\,\mathrm{s}$
   - $\boldsymbol{u}_{\text{Typ-B}}(\Delta T) = 0{,}6\,\mathrm{K}$
   - $\boldsymbol{u}(\Delta T) = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}504525^2}\,\mathrm{K} = 0{,}78393\,\mathrm{K}$
   - $\Delta T = (55{,}00 \pm 0{,}79)\,\mathrm{K}$
     $= 55{,}00\,(79)\;\mathrm{K}$ (auf zwei signifikante Stellen, also auf 0,01 K gerundet)
2.
   - $$\Theta = \frac{2\,c_W\,m_W\,\Delta T}{\omega^2} = \frac{2\,c_W\,\rho_W\,a^3\,\Delta T\,\tau^2}{4\pi^2\,N^2}$$
     $$= \frac{2\cdot 4{,}18\cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\cdot 1000\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot(31{,}1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^3\cdot 55\,\mathrm{K}\cdot(1{,}06\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2\cdot(10^2)^2}$$
     $\langle\Theta\rangle = 0{,}792107\,\mathrm{kg\,m^2}$
   - $$\left(\frac{\boldsymbol{u}(\Theta)}{\Theta}\right)^2 = \left(\frac{\boldsymbol{u}(\Delta T)}{\Delta T}\right)^2 + \left(3\,\frac{\boldsymbol{u}(a)}{a}\right)^2 + \left(2\,\frac{\boldsymbol{u}(\tau)}{\tau}\right)^2$$
     $$= \left(\frac{0{,}79}{55{,}00}\right)^2 + \left(3\,\frac{0{,}1}{31{,}3}\right)^2 + \left(2\,\frac{0{,}01}{1{,}06}\right)^2$$
     $$= 0{,}01436^2 + 0{,}00958^2 + 0{,}01887^2$$
   - $\dfrac{\boldsymbol{u}(\Theta)}{\Theta} = 0{,}02558$
   - $\boldsymbol{u}(\Theta) = 0{,}02558\cdot 0{,}792107\,\mathrm{kg\,m^2}$
     $= 0{,}020260\,\mathrm{kg\,m^2}$
   - $\Theta = (0{,}792 \pm 0{,}021)\,\mathrm{kg\,m^2}$
     $= 0{,}792\,(21)\;\mathrm{kg\,m^2}$
3. Die Messung von τ sollte als erstes verbessert werden, da sie mit 0,01887 den größten Anteil an der Gesamtunsicherheit hat. Aber auch der Anteil des Temperaturunterschiedes ΔT ist mit 0,01436 ähnlich groß. Daher müsste man beide Messungen angehen.

3.c Kombination Unsicherheiten mit Addition

L7 Lösung zu Aufgabe 7 „Volumenbestimmung“

1. $V = \dfrac{m\,s\,\pi}{\varrho\,R} + s\,R^2$

2. $\boldsymbol{u}(V)^2 = \boldsymbol{u}_m(V)^2 + \boldsymbol{u}_R(V)^2 + \boldsymbol{u}_s(V)^2$

   mit jeweils:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_m(V) &= \frac{\partial f}{\partial m}\boldsymbol{u}(m) = \frac{s\,\pi}{\varrho\,R}\boldsymbol{u}(m)\ \frac{m}{m} \\
&= \frac{m\,s\,\pi}{\varrho\,R}\ \frac{\boldsymbol{u}(m)}{m} \\
&= B\,\frac{\boldsymbol{u}(m)}{m} \\
&= (V - s\,R^2)\,\frac{\boldsymbol{u}(m)}{m} \\
\boldsymbol{u}_R(V) &= \left(-\frac{m\,s\,\pi}{\varrho\,R^2} + 2\,s\,R\right)\boldsymbol{u}(R)\ \frac{R}{R} \\
&= (-B + 2\,s\,R^2)\,\frac{\boldsymbol{u}(R)}{R} \\
&= (-V + 3\,s\,R^2)\,\frac{\boldsymbol{u}(R)}{R} \\
\boldsymbol{u}_s(V) &= \left(\frac{m\,\pi}{\varrho\,R} + R^2\right)\boldsymbol{u}(s)\ \frac{s}{s} \\
&= (B + s\,R^2)\,\frac{\boldsymbol{u}(s)}{s} \\
&= V\frac{\boldsymbol{u}(s)}{s}
\end{aligned}$$

3. Damit ist die relative Unsicherheit von V:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}(V)}{V}\right)^2 = \left(\left\{\frac{V - s\,R^2}{V}\right\}\ \frac{\boldsymbol{u}(m)}{m}\right)^2 + \left(\left\{\frac{-V + 3\,s\,R^2}{V}\right\}\ \frac{\boldsymbol{u}(R)}{R}\right)^2 + \left(\left\{\frac{V}{V}\right\}\ \frac{\boldsymbol{u}(s)}{s}\right)^2.$$

4. Die Gewichtungsfaktoren sind die Brüche in den geschweiften Klammern, jeweils vor den relativen Unsicherheiten.

5. Wenn der Gewichtungsfaktor vor der relativen Unsicherheit der Masse null wird, trägt diese nicht mehr zur Gesamtunsicherheit bei. Es muss also gelten:

$$\frac{V - sR^2}{V} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{V}{R^2}.$$

L[8]ösung zu Aufgabe 8 „Strömungsgeschwindigkeit“

1. $v = c - u = \dfrac{g}{f} - A\,\dfrac{f^2\,\tau}{s} = h(f, \tau, s)$

2. $\boldsymbol{u}(v)^2 = \boldsymbol{u}_f(v)^2 + \boldsymbol{u}_\tau(v)^2 + \boldsymbol{u}_s(v)^2$

mit jeweils:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_f(v) &= \frac{\partial h}{\partial f}\boldsymbol{u}(f) = \left(-\frac{g}{f^2} - 2A\,\frac{f\,\tau}{s}\boldsymbol{u}(f)\right)\cdot\frac{f}{f} && \text{(Ableiten und Erweitern)}\\
&= \left(-\frac{g}{f} - 2\,A\,\frac{f^2\,\tau}{s}\right)\,\frac{\boldsymbol{u}(f)}{f} && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= (-c-2u)\,\frac{\boldsymbol{u}(f)}{f}\\
&= (-c-2(c-v))\,\frac{\boldsymbol{u}(f)}{f} = (-3c+2v)\,\frac{\boldsymbol{u}(f)}{f}\\
\boldsymbol{u}_\tau(v) &= \left(-A\,\frac{f^2}{s}\right)\boldsymbol{u}(\tau)\cdot\frac{\tau}{\tau} && \text{(Ableiten und Erweitern)}\\
&= -\left(A\,\frac{f^2\tau}{s}\right)\,\frac{\boldsymbol{u}(\tau)}{\tau} = -u\,\frac{\boldsymbol{u}(\tau)}{\tau} && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= (v-c)\frac{\boldsymbol{u}(\tau)}{\tau}\\
\boldsymbol{u}_s(v) &= \left(A\,\frac{f^2\,\tau}{s^2}\right)\boldsymbol{u}(s)\cdot\frac{s}{s} && \text{(Ableiten und Erweitern)}\\
&= u\,\frac{\boldsymbol{u}(s)}{s} && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= (c-v)\,\frac{\boldsymbol{u}(s)}{s}
\end{aligned}
$$

3. Damit ist die relative Unsicherheit von v:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}(v)}{v}\right)^2 = \left(\left\{\frac{2v-3c}{v}\right\}\,\frac{\boldsymbol{u}(f)}{f}\right)^2 + \left(\left\{\frac{v-c}{v}\right\}\,\frac{\boldsymbol{u}(\tau)}{\tau}\right)^2 + \left(\left\{\frac{v-c}{v}\right\}\,\frac{\boldsymbol{u}(s)}{s}\right)^2.$$

   Hierbei wurde verwendet dass $(c-v)^2 = (v-c)^2$.

4. Die Gewichtungsfaktoren sind die Brüche in den geschweiften Klammern, jeweils vor den relativen Unsicherheiten.

5. Wenn der Gewichtungsfaktor vor der relativen Unsicherheit der Frequenz null wird, trägt diese nicht mehr zur Gesamtunsicherheit bei. Es muss also gelten:

$$\frac{2v-3c}{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{2v}{3}.$$

L9 Lösung zu Aufgabe 9 „Volumen eines Rohrs“

1. $V = V_a - V_b = \frac{\pi\,a^2\,h}{4} - \frac{\pi\,b^2\,h}{4} = \frac{\pi}{4}\,(a^2-b^2)\,h = f(h,a,b)$
2. $\boldsymbol{u}(V)^2 = \boldsymbol{u}_h(V)^2 + \boldsymbol{u}_a(V)^2 + \boldsymbol{u}_a(V)^2$

mit jeweils:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_h(V) &= \frac{\partial f}{\partial h}\boldsymbol{u}(h) = \left(\frac{\pi}{4}\,(a^2-b^2)\right)\boldsymbol{u}(h) && \text{(Partiell Ableiten)}\\
&= \left(\frac{\pi}{4}\,(a^2-b^2)\right)\boldsymbol{u}(h)\cdot\frac{h}{h} && \text{(Erweitern)}\\
&= \underbrace{\left(\frac{\pi}{4}\,(a^2-b^2)\,h\right)}_{V}\frac{\boldsymbol{u}(h)}{h} && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= V\frac{\boldsymbol{u}(h)}{h}\\
\boldsymbol{u}_a(V) &= 2\,\frac{\pi\,a\,h}{4}\boldsymbol{u}(a)\;\frac{a}{a}\\
&= 2\,V_a\,\frac{\boldsymbol{u}(a)}{a}\\
\boldsymbol{u}_b(V) &= -2\,\frac{\pi\,b\,h}{4}\boldsymbol{u}(b)\;\frac{b}{b}\\
&= -2\,V_b\,\frac{\boldsymbol{u}(b)}{b}
\end{aligned}$$

3. Damit ist die relative Unsicherheit von V:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\boldsymbol{u}(V)}{V}\right)^2 &= \left(\left\{\frac{V}{V}\right\}\frac{\boldsymbol{u}(h)}{h}\right)^2 + \left(\left\{2\frac{V_a}{V}\right\}\frac{\boldsymbol{u}(a)}{a}\right)^2 + \left(\left\{2\frac{V_b}{V}\right\}\frac{\boldsymbol{u}(b)}{b}\right)^2.\\
&= \left(\{1\}\,\frac{\boldsymbol{u}(h)}{h}\right)^2 + \left(\left\{2\frac{V_a}{V_a-V_b}\right\}\frac{\boldsymbol{u}(a)}{a}\right)^2 + \left(\left\{2\frac{V_b}{V_a-V_b}\right\}\frac{\boldsymbol{u}(b)}{b}\right)^2.
\end{aligned}$$

4. Die Gewichtungsfaktoren sind die Werte oder Brüche in den geschweiften Klammern, jeweils vor den relativen Unsicherheiten.

5. Für kleine Bohrungen, also $V_b \ll V_a$ werden die Vorfaktoren 1, 2 und 0 entsprechend. Falls aber $V_b \approx V_a$ werden die Vorfaktoren von a und b sehr groß. Das Bestimmen des Volumens von dünnwandigen Rohren ist auf diesem Wege daher stark fehlerbehaftet.