Physik Methoden
Übungsaufgaben zu Kapitel 7 „Modellbildung“

Christian Hettich, Bernd Jödicke, Jürgen Sum

11. April 2024

In diesem Dokument finden Sie Aufgaben zum Kapitel 7 „Modellbildung“ aus unserem Buch Physik Methoden. Wenn Sie die PDF-Datei des Buchs ins gleiche Verzeichnis wie diese Datei hier legen und Sie die PDF-Datei des Buchs in „Physik-Methoden-2023.pdf“ umbenennen, können Sie mit den grünen Links in den meisten PDF-Programmen direkt an die passende Stelle im Buch springen.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

Aufgabe 1: Meerestropfen

Angenommen, man würde aus dem Wasser aller Meere der Erde einen Tropfen bilden.
Wie groß wäre dieser „Meerestropfen“?

Zum Hinweis

Aufgabe 2: Brillenmasse

Wie groß ist die gesamte Masse an Brillen, die die Optiker in Konstanz[1] pro Jahr verkaufen?

Zum Hinweis

Aufgabe 3: PKW-Treibstoff

Wie viele Liter Treibstoff verbrauchen alle PKW in Deutschland in einem Jahr?

Zum Hinweis

[1] Alternativ können Sie hier natürlich auch “Ihre“ Stadt betrachten.

Aufgabe 4: Coffee-to-go Becher

Wie viele kg Müll entstehen durch „Coffee-to-go“ jährlich in Deutschland, wenn man annimmt, dass nur Einweg-Pappbecher benutzt werden?

Zum Hinweis

Aufgabe 5: Schokolade in Schultüten

Wie viele kg Schokolade werden jedes Jahr in Deutschland für die Schultüten von Erstklässlern gekauft?

Zum Hinweis

2 Hinweise

Hinweis 1 zu Aufgabe 1 „Meerestropfen"

Entwickeln Sie gemäß Rezept 7.2.1 eine einfaches Modell. Dazu modellieren Sie die Erde als Würfel (vgl. Beispiel 7.2.iv). Auch den Meerestropfen stellen Sie sich als Würfel vor und suchen die Kantenlänge dieses Tropfens.

Zur Lösung

Hinweis 2 zu Aufgabe 2 „Brillenmasse"

Entwickeln Sie gemäß Rezept 7.2.1 eine einfaches Modell.

Zur Lösung

Hinweis 3 zu Aufgabe 3 „PKW-Treibstoff"

Entwickeln Sie gemäß Rezept 7.2.1 eine einfaches Modell. Deshalb verzichten Sie auf eine Unterscheidung zwischen verschiedenen Treibstoffsorten. Auch kann derzeit (Stand 2023) noch der geringe Anteil an Elektroautos an der PKW-Flotte ignoriert werden. Dies muss aber zukünftig im Auge behalten werden.

Zur Lösung

Hinweis 4 zu Aufgabe 4 „Coffee-to-go Becher"

Entwickeln Sie gemäß Rezept 7.2.1 eine einfaches Modell.

Zur Lösung

Hinweis 5 zu Aufgabe 5 „Schokolade in Schultüten"

Entwickeln Sie gemäß Rezept 7.2.1 eine einfaches Modell. Um abzuschätzen, wie viele Schultüten pro Jahr in Deutschland befüllt werden, denken darüber nach, wie viele Schultüten jeder Mensch in seinem Leben bekommt und wie lange das Leben im Durchschnitt dauert. Nutzen Sie Rezept 7.2.9.

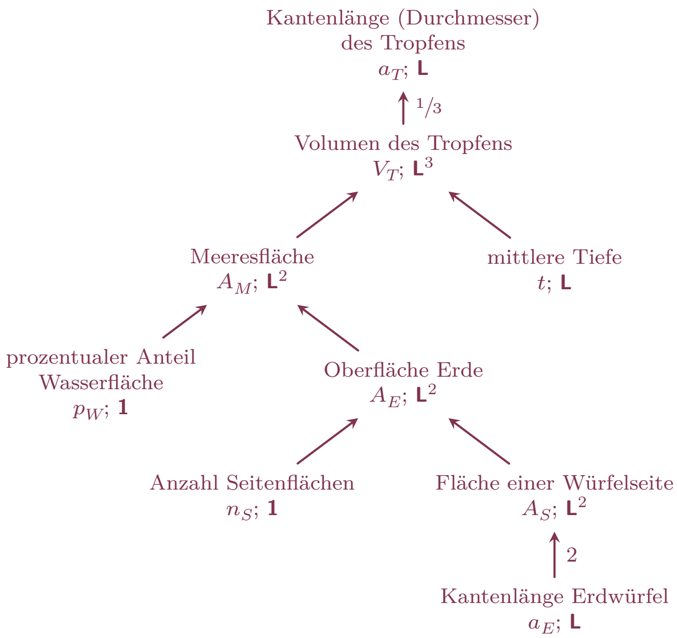
Zur Lösung

3 Lösungen

Die hier präsentierten Lösungen sind als Lösungsvorschläge zu verstehen. Bei der Modellierung von Fermi-Aufgaben gilt, mehr noch als in anderen Gebieten, dass es meist viele Wege zum Ziel gibt. Wer also ein anderes Modell zur Problemlösung entwickelt, kann dennoch alles „richtig“ gemacht haben.

Lösung 1 zu Aufgabe 1 „Meerestropfen“

1. Schritt: Parameter und grafisches Modell:



2. Schritt: Mathematisches Modell / Formel:

Aus dem Diagramm ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
a_T &= \sqrt[3]{V_T} = \sqrt[3]{A_M\, t} = \sqrt[3]{p_W\, A_E\, t} = \sqrt[3]{p_W\, n_S\, A_S\, t} \\
&= \sqrt[3]{p_W\, n_S\, a_E^2\, t}
\end{aligned}
$$

3. Schritt: Annahmen:

a_E: Falls man beispielsweise den Umfang der Erde (40 000 km) kennt, kann man ein Viertel davon als Kantenlänge ansetzen:

$$a_E = 10\,000\,\text{km} = 10^4\,\text{km}.$$

t: Um die mittlere Tiefe der Meere zu schätzen, verwenden wir den geometrischen Mittelwert als Schätzhilfe (vgl. Rezept 7.2.6 und Beispiel 7.2.ii):

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimalschätzung:} && t_{min} = 2\,\text{km} \\
&\text{Maximalschätzung:} && t_{max} = 6\,\text{km}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir für t:

$$t = \sqrt{12}\,\text{km} \approx 3{,}5\,\text{km}.$$

n_S: Da die Erde als Würfel modelliert wurde, haben wir 6 Würfelseiten:

$$n_S = 6.$$

p_W: Die Erde, der „blaue Planet“, ist zu gut 2/3 mit Wasser bedeckt:

$$p_W = \frac{2}{3}.$$

4. Schritt: Ausrechnen:

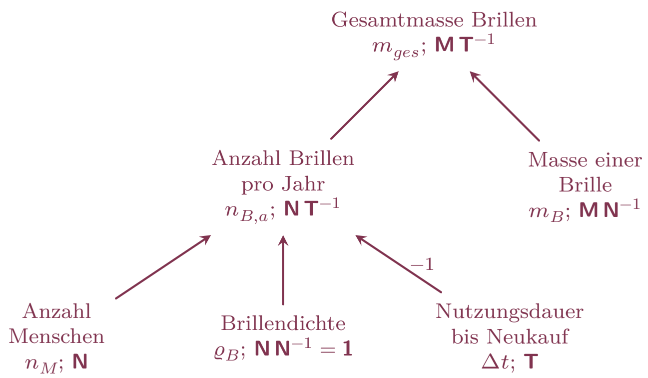
Einsetzten ergibt:

$$\begin{aligned} a_T &= \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot (10^4\,\mathrm{km})^2 \cdot 3{,}5\,\mathrm{km}} \\ &= \sqrt[3]{14 \cdot 10^8\,\mathrm{km}^3} \\ &= \sqrt[3]{1{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{km}^3} \\ &\approx 1{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Für den Meerestropfen finden wir also ein Volumen von 1,4 Milliarden km^3 und eine Kantenlänge von $a_T \approx 1{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{km} = 1100\,\mathrm{km}$.

2 Lösung zu Aufgabe 2 „Brillenmasse“

1. Schritt: Parameter und grafisches Modell:



2. Schritt: Mathematisches Modell / Formel:

In der Formel (im mathematischen Modell) spiegeln sich die Ebenen des grafischen Modells wieder. Zunächst haben wir $m_{ges} = n_{B,a}\, m_B$. Dann ersetzen wir $n_{B,a}$ durch $\dfrac{n_M\, \rho_B}{\Delta t}$. Rechts stehen jetzt nur noch Größen, über die wir Aussagen machen können, weil wir sie kennen, oder messen beziehungsweise schätzen können. Dies sind die Größen, die im grafischen Modell jeweils am unteren Ende der Äste stehen.

So ergibt ich die Lösungsformel:

$$\begin{aligned} m_{ges} &= n_{B,a}\, m_B \\ &= \frac{n_M\, \rho_B}{\Delta t}\, m_B. \end{aligned}$$

3. Schritt: Annahmen:

n_M: Konstanz hat gut 80.000 Einwohner. Wir erhöhen diese Zahl etwas, da es auch in umliegenden Dörfern, die selbst keinen Optiker haben, Brillenträger gibt. Nehmen wir also

$$n_M = 100.000\,\mathrm{Mensch} = 10^5\,\mathrm{Mensch}.$$

Wir bleiben bei der Einheit „Mensch“. Grammatikalisch ist das ungewohnt, mathematisch ist es korrekt. Die Einheit (1 Stück) ist eben „Mensch“.

ϱ_B: Für die Brillendichte nehmen wir an, dass jeder zweite Mensch Brillenträger ist: $\varrho_B = \frac{1\,\mathrm{Brille}}{2\,\mathrm{Mensch}}$.

Δt: Wie oft gibt es eine neue Brille? Wir schätzen: $\Delta t = 3\,\mathrm{a}$ (3 Jahre).

m_B: Nun bleibt noch die durchschnittliche Masse einer Brille. Da wir an dieser Stelle doch recht unsicher sind, nutzen wir die Methode des geometrischen Mittels (vgl. Rezept 7.2.6 und Beispiel 7.2.ii). Wir vermuten, die durchschnittliche Brillenmasse beträgt mindestens 15 g und höchstens 50 g. Aus diesen beiden Werten berechnen wir den geometrische Mittelwert als Schätzwert für die mittlere Brillenmasse:

$$\begin{aligned} m_B &\approx \frac{\sqrt{15\ \mathrm{g} \cdot 50\ \mathrm{g}}}{\mathrm{Brille}} = \sqrt{750}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{Brille}} \\ &\approx 27\ \mathrm{g} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{Brille}}. \end{aligned}$$

Wenn Ihnen das zu unsicher ist, sollten Sie auf die Straße gehen und die Brillen der nächsten 1000 Brillenträgern, die Ihnen begegnen, auf eine Waage legen.

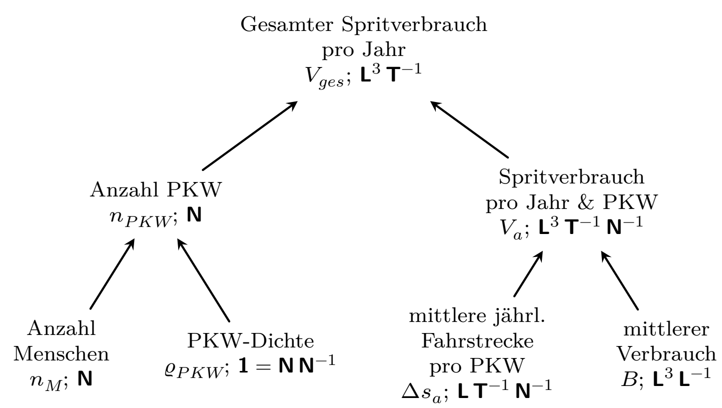
4. Schritt: Ausrechnen:

Bei den Einheiten kürzen sich „Brille“ und „Mensch“ heraus; die resultierende Einheit $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{a}}$ ist für unsere Fragestellung völlig korrekt. Das Modell erhebt sicher nicht den Anspruch, den tatsächlichen Wert mit einer höheren Genauigkeit als 10 % zu liefern. Deshalb kürzt man bei der Rechnung einfach die 3 gegen die 2,7.

$$\begin{aligned} m_{ges} &\approx \frac{10^5\ \text{Mensch} \cdot \frac{1\ \text{Brille}}{2\ \text{Mensch}}}{3\ \mathrm{a}} \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{kg}}{\text{Brille}} \\ &\approx 0{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{a}} \\ &\approx 500\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{a}} \end{aligned}$$

3 Lösung zu Aufgabe 3 „PKW-Treibstoff“

1. Schritt: Parameter und grafisches Modell:



2. Schritt: Mathematisches Modell / Formel:

Aus dem Diagramm ergibt sich:

$$V_{ges} = n_{PKW} \cdot V_a = n_M \cdot \varrho_{PKW} \cdot \Delta s_a \cdot B$$

3. Schritt: Annahmen:

Für die vier Parameter müssen wir Werte annehmen:

$$
\begin{aligned}
n_M &= 80 \cdot 10^6 \text{ Mensch} \\
\varrho_{PKW} &= \frac{1}{2} \frac{\text{PKW}}{\text{Mensch}} \\
\Delta s_a &= 15\,000 \frac{\text{km}}{\text{PKW a}} \\
B &= 7 \frac{\text{l}}{100\,\text{km}}
\end{aligned}
$$

4. Schritt: Ausrechnen:

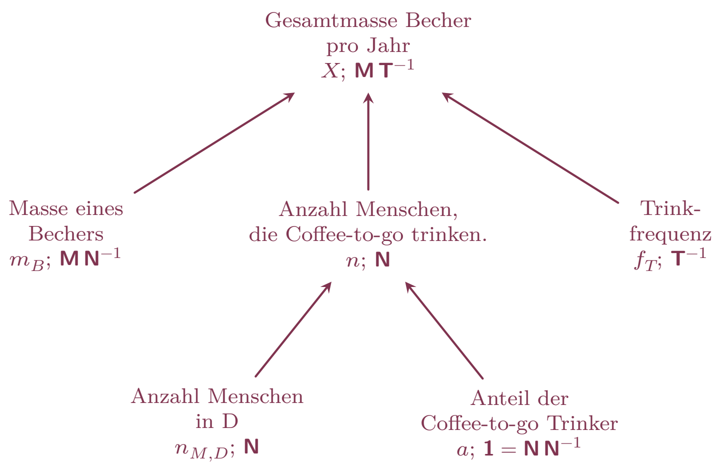
Einsetzten ergibt:

$$
\begin{aligned}
V_{ges} &\approx \; 8 \cdot 10^7 \text{ Mensch} \cdot \frac{1}{2} \frac{\text{PKW}}{\text{Mensch}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{PKW a}} \cdot 7 \frac{\text{l}}{10^2 \text{ km}} \\
&\approx \; 42 \cdot 10^9 \frac{\text{l}}{\text{a}}.
\end{aligned}
$$

Wir finden also für Deutschland einen jährlichen Treibstoffverbrauch von etwa 40 Milliarden Liter Sprit (ohne Unterscheidung zwischen Benzin und Diesel) im PKW-Verkehr.

Lösung 4 zu Aufgabe 4 „Coffee-to-go Becher“

1. Schritt: Parameter und grafisches Modell:



2. Schritt: Mathematisches Modell / Formel:

Aus dem Diagramm ergibt sich:

$$X = m_B \; n \; f_T = m_B \; n_{M,D} \; a \; f_T$$

3. Schritt: Annahmen:

Für die vier Parameter nehmen wir beispielsweise folgende Werte an:

$$
\begin{aligned}
m_B &= 20 \frac{\text{g}}{\text{Becher}} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{Becher}} \\
n_{M,D} &= 80 \text{ Millionen Menschen} = 8 \cdot 10^7 \text{ Mensch} \\
a &= 50 \ \% = \frac{1}{2} \\
f_T &= \frac{1 \text{ Becher}}{4 \text{ d} \cdot \text{ Mensch}}
\end{aligned}
$$

4. Schritt: Ausrechnen:

Durch einsetzten erhalten wir:

$$X = 2 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{kg}}{\text{Becher}} \cdot 8 \cdot 10^{7}\,\text{Mensch} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1\ \text{Becher}}{4\ \text{d} \cdot\ \text{Mensch}} \cdot 4 \cdot 10^{2}\,\text{d}$$

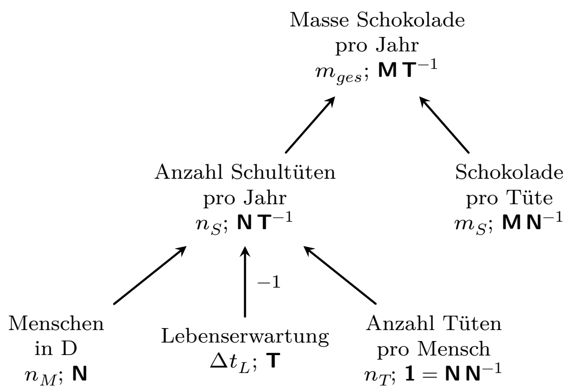
$$= 2 \cdot 10^{5}\,\frac{\text{kg}}{\text{d}}.$$

Um die gestellte Frage korrekt zu beantworten, muss man noch auf die Einheit „Kilogramm pro Jahr" ($\frac{\text{kg}}{\text{a}}$) umrechnen. Dabei kann man das Jahr mit 400 Tagen annähern und Rezept 2.2.10 nutzen (vgl. Beispiel 2.2.vi):

$$X = 2 \cdot 10^{5}\,\frac{\text{kg}}{\text{d}} \cdot \frac{400\ \text{d}}{1\ \text{a}} = 8 \cdot 10^{7}\,\frac{\text{kg}}{\text{a}} = 80\,000\,\frac{\text{Tonnen}}{\text{a}}.$$

L[5]ösung zu Aufgabe 5 „Schokolade in Schultüten"

1. Schritt: Parameter und grafisches Modell:



Eine Erläuterung: Normalerweise bekommt jeder Mensch in seinem Leben einmal eine Schultüte. Bei 80 Millionen Menschen und einer Lebenserwartung von 80 Jahren werden also pro Jahr 1 Million Tüten ausgegeben. Dies ist gewissermaßen eine Schultütenstrom. Dieses einfache Modell unterstellt allerdings eine homogene Altersverteilung in der Bevölkerung. Wer es genauer wissen will, muss an dieser Stelle das Modell verfeinern. Zusammen mit der Masse an Schokolade pro Tüte erhält man wieder einen Strom: den Schokolade-Massenstrom. In diesem Modell kommt also gleich an zwei Stellen das Rezept 7.2.9 zur Anwendung.

2. Schritt: Mathematisches Modell / Formel:

Aus dem Diagramm ergibt sich:

$$m_{ges} = n_S\, m_S = \frac{n_M\, n_T}{\Delta t_L}\, m_S$$

3. Schritt: Annahmen:

Für die vier Parameter nehmen wir beispielsweise folgende Werte an:

$$n_M = 80\ \text{Millionen Menschen} = 8 \cdot 10^{7}\,\text{Mensch}$$

$$n_T = 1\,\frac{\text{Tüte}}{\text{Mensch}}$$

$$\Delta t_L = 80\,\text{a}$$

$$m_S = 0{,}1\,\frac{\text{kg}}{\text{Tüte}}$$

4. Schritt: Ausrechnen:

Durch einsetztten erhalten wir:

$$\begin{aligned} m_{ges} &= \frac{8 \cdot 10^7 \text{ Mensch} \cdot 1 \frac{\text{Tüte}}{\text{Mensch}}}{80 \text{ a}} \cdot 0{,}1 \ \frac{\text{kg}}{\text{Tüte}} \\ &= 1 \cdot 10^5 \ \frac{\text{kg}}{\text{a}} = 100 \ \frac{\text{Tonnen}}{\text{a}}. \end{aligned}$$

Jedes Jahr liegen etwa 100 Tonnen Schokolade in den Schultüten der Kinder, die eingeschult werden.