Physik Methoden
Übungsaufgaben zu Kapitel 3 „Mathematik für die Physik“

Christian Hettich, Bernd Jödicke, Jürgen Sum

11. April 2024

In diesem Dokument finden Sie Aufgaben zum Kapitel 3 „Mathematik für die Physik“ aus unserem Buch Physik Methoden. Wenn Sie die PDF-Datei des Buchs ins gleiche Verzeichnis wie diese Datei hier legen und Sie die PDF-Datei des Buchs in „Physik-Methoden-2023.pdf“ umbenennen, können Sie mit den grünen Links in den meisten PDF-Programmen direkt an die passende Stelle im Buch springen.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

1.a Statistik

Aufgabe 1: Basiskennzahlen Statistik

Zum Kennenlernen der Basiskennzahlen der Statistik empfehlen wir, die folgende Aufgabe handschriftlich und ohne Taschenrechner zurechnen.

Gegeben sind folgende Wertepaare (x_i, y_i):

Größe	$i =$	1	2	3	4	5	6
x_i		1	1	0	2	1	1
y_i		3	4	2	4	3	3

a) Berechnen Sie dazu die Basiskennzahlen:

- N,
- $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i$,

- $\sum_{i=1}^{N} y_i$,
- $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$,
- $\sum_{i=1}^{N} y_i^2$ und
- $\sum_{i=1}^{N} x_i \, y_i$.

b) Berechnen Sie nun:

- $\bar{x}$,
- $\bar{y}$,
- ${\sigma_x}^2$,
- ${\sigma_y}^2$,
- $\mathrm{KOV}(x, y)$ und
- r^2.

Zum Hinweis

1.b Funktionen

Aufgabe 2: Funktionen Prüfen

Sie vermuten folgende Funktion als Beschreibung einer Beobachtung.

$$f(x) = 5\,x^2 + 3x - 2$$

An welchen Stellen würden Sie zuerst überprüfen, ob diese Funktion sinnvoll ist?

Zum Hinweis

Aufgabe 3: Taylorreihe: lineare Näherung

Wie lautet die Näherungs-Geradengleichung zu folgender Sinus-Funktion

$$f(x) = a\,\sin(x)$$

a) im Punkt $x = 0$ und

b) im Punkt $x = \frac{\pi}{2}$.

Zum Hinweis

Aufgabe 4: Taylorreihe: Energiegleichgewicht

In einem stabilen Zustand hat die Energie ein Minimum (vgl. Abschnitt 11.3.c). Für viele Energieberechnungen nähert man dieses Minimum durch eine Parabel an.[1]

Sie haben folgende Energiefunktion gegeben:

$$E(x) = \frac{4}{3}\, k^2\, x^3 - b^2\, x \quad \text{mit} \quad b, k > 0.$$

Berechnen Sie die Funktion der Parabel im Minimum. Geben Sie die Funktion an in der neuen Ortsvariablen $\xi = x - x_{min}$ an.

Zum Hinweis

[1] Hinweis: Daraus resultiert die Theorie des harmonischen Oszillators.

2 Hinweise

2.a Statistik

Hinweis[1] zu Aufgabe 1 „Basiskennzahlen Statistik“

Werte addieren, Bsp:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 8$$

und Definitionen anwenden z.B. Definition 3.2.5 und Definition 3.2.9

Zur Lösung

2.b Funktionen

Hinweis[2] zu Aufgabe 2 „Funktionen Prüfen“

Beachten Sie Rezept 3.3.4 und Rezept 3.3.5.

Zur Lösung

Hinweis[3] zu Aufgabe 3 „Taylorreihe: lineare Näherung“

Nutzen Sie die Definition 3.3.16 „Taylorreihe“ indem Sie Rezept 3.3.17 „Polynomnäherung“ anwenden.

Schreiben Sie die Funktion und die Ableitungen explizit hin. Rechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen aus und setzten diese dann in die Definition ein.

Zur Lösung

Hinweis[4] zu Aufgabe 4 „Taylorreihe: Energiegleichgewicht“

Bestimmen Sie zuerst das lokale Minimum der Energiefunktion. Bei $x \to -\infty$ gilt die Beschreibung mit dieser Funktion sehr wahrscheinlich nicht.

Nutzen Sie die Definition 3.3.16 „Taylorreihe“ indem Sie in Rezept 3.3.17 „Polynomnäherung“ die quadratische Näherung berechnen.

Schreiben Sie die Funktion und Ableitungen explizit hin. Rechnen Sie die Funktionswerte am lokalen Minimum aus und setzten diese dann in die Definition ein.

Zur Lösung

3 Lösungen

3.a Statistik

Lösung[1] zu Aufgabe 1 „Basiskennzahlen Statistik“

a) Berechnen Sie zu folgenden Werten die Basiskennzahlen:

Größe							$\sum$
$i = 1 \dots N$	1	2	3	4	5	6	
N	1	1	1	1	1	1	6
x_i	1	1	0	2	1	1	6
y_i	3	4	2	4	3	3	19
x_i^2	1	1	0	4	1	1	8
y_i^2	9	16	4	16	9	9	63
$x_i\, y_i$	3	4	0	8	3	3	21

b) Berechnen Sie nun (siehe z.B. Definition 3.2.5 und Definition 3.2.9):

a)
$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{6}{6} = 1$$

b)
$$\bar{y} = \langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{19}{6} = 3{,}166 \dots$$

c)
$$\begin{aligned} {\sigma_x}^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{8}{6} - 1 = 0{,}333 \dots \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} {\sigma_y}^2 &= \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \right) - \bar{y}^2 \\ &= \frac{63}{6} - 3{,}166^2 \approx 10{,}5 - 3 \cdot 3{,}3 \approx 0{,}5 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \mathrm{KOV}(x, y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i - \bar{x}\, \bar{y} \\ &= \frac{21}{6} - 1 \cdot 3{,}166 \approx 0{,}33 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\mathrm{KOV}(x, y)^2}{\mathrm{KOV}(x, x)\ \mathrm{KOV}(y, y)} \\ &\approx \frac{0{,}33^2}{0{,}333 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}67 \end{aligned}$$

3.b Funktionen

L2 Lösung zu Aufgabe 2 „Funktionen Prüfen“

Batrachten Sie unabhängig von der Funktion:

- Grenzwerte: $x \to \infty$ und $x \to -\infty$
- Ursprung: $x = 0$
- Nullstellen suchen: $f(x) = 0$
- Extremwerte suchen: $f'(x) = 0$

L3 Lösung zu Aufgabe 3 „Taylorreihe: lineare Näherung“

Für die lineare Näherung müssen Sie von der Taylorreihe nur die Konstante und den linearen Term berücksichtigt werden.

$$f(x) = a\,\sin(x)$$
$$f'(x) = a\,\cos(x)$$

Damit ergibt sich

a) im Punkt $x = 0$:

$$f(x) \approx f(0) + (x-0)f'(0) = 0 + x\,a \quad \text{und}$$

b) im Punkt $x = \pi/2$

$$f(x) \approx f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + 0.$$

Im Ursprung hat die Näherungs-Gerade eine Steigung von a. Und bei $x = \frac{\pi}{2}$ ist die Gerade eine Konstante, also mit Steigung null. Das passt, denn dort hat der Sinus ein Maximum.

L4 Lösung zu Aufgabe 4 „Taylorreihe: Energiegleichgewicht“

Zuerst müssen wir die Lage des Minimums finden: $E'(x) = 0$ und $E''(x) > 0$.

Nullstellen der Ableitung finden:

$$E'(x) = 4\,k^2\,x^2 - b^2 = 0.$$

Daraus ergeben sich die Extremwerte:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4\,k^2}} = \pm\frac{b}{2\,k}.$$

Berechnung der zweiten Ableitung:

$$E''(x) = 8\,k^2\,x.$$

Diese muss > 0 sein, damit es sich bei dem Extremwert um ein Minimum handelt. Somit ergibt sich

$$x_{min} = \frac{b}{2\,k} \quad \text{da} \quad b > 0.$$

Jetzt kommt die Taylorreihen-Entwicklung um den Punkt $x_0 = x_{min}$ bis in zweite Ordnung mit der neuen Ortsvariablen $\xi = x - x_{min}$:

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{=\xi}\, f'(x_0) + \frac{1}{2!}\, f''(x_0)\, \underbrace{(x - x_0)^2}_{=\xi^2}$$

Da wir im Minimum sind, ist $f'(x_0) = 0$. Wir erhalten also:

$$E(\xi) \approx E(x_{min}) + \frac{1}{2}\, E''(x_{min})\, \xi^2$$

Nun die Konstanten berechnen:

$$\begin{aligned} E(x_{min}) &= \frac{4}{3}\, k^2 \left(\frac{b}{2\,k}\right)^3 - b^2\, \frac{b}{2\,k} \\ &= \frac{b^3}{6\,k} - \frac{b^3}{2\,k} = -\frac{b^3}{3\,k} \end{aligned}$$

und

$$E''(x_{min}) = 8\, k^2\, \frac{b}{2\,k} = 4\, k\, b.$$

Somit erhalten wir die gesuchte Parabelgleichung:

$$E(\xi) = -\frac{b^3}{3\,k} + 2\, k\, b\, \xi^2.$$