Physik Methoden
Übungsaufgaben zu Kapitel 2 „Größen, Dimensionen und Einheiten“

Christian Hettich, Bernd Jödicke, Jürgen Sum

11. April 2024

In diesem Dokument finden Sie Aufgaben zum Kapitel 2 „Größen, Dimensionen und Einheiten“ aus unserem Buch Physik Methoden. Wenn Sie die PDF-Datei des Buchs ins gleiche Verzeichnis wie diese Datei hier legen und Sie die PDF-Datei des Buchs in „Physik-Methoden-2023.pdf“ umbenennen, können Sie mit den grünen Links in den meisten PDF-Programmen direkt an die passende Stelle im Buch springen.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

1.a Einheiten und SI

Aufgabe 1: SI-Basisgrößen oder abgeleitete Größen?

Ordnen Sie folgende physikalische Größen nach **SI-Basisgrößen** und **abgeleitete Größen**.

Wenn Sie eine Größe nicht kennen, lesen Sie in einem Buch oder im Internet nach und versuchen Sie die Einordnung. Geben Sie zu jeder Größe die Dimension und die Einheit als Kombination von SI-Basiseinheiten an:

Kraft, Impuls, potenzielle Energie, Massenstromstärke, Entropie, Massendichte, elektrische Raumladungsdichte, Stoffmenge, elektrische Ladung, magnetische Feldstärke, Druck, kinetische Energie, Frequenz, Energiedichte, Masse.

Zur Lösung

Aufgabe 2: Symbole und Einheiten der Größen

Geben Sie für die in Aufgabe 1 genannten Größen die Symbole, die Dimensionen und die Einheiten an. Falls eine der nicht-SI-Basisgrößen eine eigene Einheit hat, geben Sie diese und die Rückführung auf die SI-Basiseinheiten an.
Wenn Sie eine Größe nicht kennen, lesen Sie in einem Buch oder im Internet nach.

Zum Hinweis

Aufgabe 3: Vektor oder Skalar?

Ordnen Sie die in Aufgabe 1 genannten Größen nach **Vektorgrößen** und **skalaren Größen**.

Zur Lösung

Aufgabe 4: Umrechnen von Einheiten

Rechnen Sie um in die $\Rightarrow$ Zieleinheit:

a) Strecke: 3,21 km $\Rightarrow$ cm (Zentimeter)

b) Fläche: $4\,\text{m}^2 \Rightarrow \text{mm}^2$

c) Druck: $0{,}002201\,\dfrac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \Rightarrow$ hPa (Hektopascal)

d) Arbeit: $120\,\text{Nm} \Rightarrow \text{kW}$

e) Geschwindigkeit: $32\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \dfrac{\text{mi}}{\text{h}}$ (= mph = miles per hour)

f) Energie: $540\,\text{MJ} \Rightarrow \text{kWh}$

g) Energiestromstärke: $10\,\text{W} \Rightarrow \dfrac{\text{kJ}}{\text{h}}$

h) Energiedichte: $2700\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \Rightarrow \dfrac{\text{J}}{\text{cm}^3}$

Zum Hinweis

1.b Dimensionsanalyse

1.b.1 Basisaufgaben

A5 Aufgabe: Dimensionsanalyse

Bei den folgenden Aufgaben zeigen Größengleichungen, die teilweise frei erfunden und physikalisch ohne Aussage sind. Sie verhalten sich aber bezüglich einer Dimensionsbetrachtung korrekt.
Wir verwenden in den Aufgaben **lateinische** Buchstaben für bekannte physikalische Größen (wie in den Aufgaben angegeben) und **griechische** Buchstaben für die unbekannten Größen, deren Dimensionen und Darstellungen in SI-Basiseinheiten hier zu bestimmen sind.

Tipp: Machen Sie sich mit dem griechischen Alphabet vertraut (siehe Tabelle A.5); es wird Ihnen in der Physik immer wieder begegnen.

a) Gegeben ist

$$F = \mathit{\Psi}\, m + \mathit{\Omega}$$

mit der Kraft F und der Masse m.

Gesucht wird:

$\dim(\mathit{\Psi}) =$ $[\mathit{\Psi}]_{\mathrm{SI}} =$

$\dim(\mathit{\Omega}) =$ $[\mathit{\Omega}]_{\mathrm{SI}} =$

b) Gegeben ist

$$F = \theta\, m + \theta$$

mit der Kraft F und der Masse m.

Gesucht wird:

$\dim(\theta) =$ $[\theta] =$

c) Gegeben ist

$$I_q = \theta \cos(\mathit{\Omega}\, t^2) - \frac{\phi}{t}$$

mit der elektrischen Stromstärke I_q und der Zeit t.

Gesucht wird:

$\dim(\theta) =$ $[\theta]_{\mathrm{SI}} =$

$\dim(\mathit{\Omega}) =$ $[\mathit{\Omega}]_{\mathrm{SI}} =$

$\dim(\phi) =$ $[\phi]_{\mathrm{SI}} =$

d) Gegeben ist

$$P = 28\, s\, \mathit{\Psi} \log_{10}\left(\frac{5\,\mathit{\Omega}}{T}\right) - F\,\vartheta - 2\sqrt{\frac{\mathit{\Phi}}{A}}$$

mit der Energiestromstärke (Leistung) P, dem Weg s, der Temperatur T, der Kraft F und der Fläche A.

Gesucht wird:

$\dim(\mathit{\Psi}) =$ $[\mathit{\Psi}]_{\mathrm{SI}} =$

$\dim(\mathit{\Omega}) =$ $[\mathit{\Omega}]_{\mathrm{SI}} =$

$\dim(\vartheta) =$ $[\vartheta]_{\mathrm{SI}} =$

$\dim(\mathit{\Phi}) =$ $[\mathit{\Phi}]_{\mathrm{SI}} =$

Zum Hinweis

1.b.2 Für Fortgeschrittene

Aufgabe 6: Fortgeschrittene Dimensionsanalyse Feder Masse

Wie hängt die bei einem Feder-Masse Oszillator die Schwingungsdauer (Periode) T von der angehängten Masse m, der Auslenkung s der Masse und der Richtgröße der Feder D ab?

Zum Hinweis

Aufgabe 7: Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Ideales Gas

In der Thermodynamik gibt es für ideale Gase eine Gesetzmäßigkeit, die die Größen Druck p, Temperatur T, Volumen V und Stoffmenge n mit einer Naturkonstanten R verknüpft. R ist die **universelle Gaskonstante** mit dem Wert $R = 8{,}31 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}$

a) Geben Sie die Dimension der Gaskonstanten an.

b) Bestimmen Sie, wie das Volumen eines Gases von den Größen Druck, Temperatur, Stoffmenge und Gaskonstante abhängt.

Zum Hinweis

Aufgabe 8: Fortgeschrittene Dimensionsanalyse Pendeluhr

Bei einer großen Pendeluhr hängt eine nahezu punktförmige Masse $m = 5\,\mathrm{kg}$ an einem nahezu masselosen Stab mit der Länge $\ell = 50\,\mathrm{cm}$. Die Uhr geht täglich 5 Minuten vor.

Wie müssen Sie die Länge des Stabs verändern, damit die Uhr richtig geht?

Zum Hinweis

Aufgabe 9: Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Luftwiderstand - einfaches Modell

Führen Sie eine Dimensionsanalyse für die Luftwiderstandskraft F_{LW} durch.

Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Luft ein ideales Gas ist, das heißt, dass die Viskosität vernachlässigt werden kann. Ein Einflussfaktor ist zum Beispiel die Querschnittsfläche A des Körpers. Finden Sie die weiteren Einflussfaktoren, und stellen Sie eine Formel für den Luftwiderstand auf.

Zum Hinweis

1.b.3 Für Experten

Aufgabe 10: Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Luftwiderstand - mit Viskosität

Erweitern Sie die Dimensionsanalyse für die Luftwiderstandskraft F_{LW} aus Aufgabe 9.

a) Berücksichtigen Sie jetzt zusätzlich zu den Einflussparametern aus Aufgabe 9 die kinematische Viskosität.

   Wie sieht jetzt die Formel für den Luftwiderstand aus, die Sie aus einer Dimensionsanalyse ableiten können?

b) Sie möchten den Luftwiderstand eines Autos in einem Windkanal an einem Modell, das nur halb so groß ist wie das echte Auto, ausmessen. Was müssen Sie berücksichtigen?

Zum Hinweis

1.c Basissystem Definition aus Naturkonstanten

Aufgabe 11: Basisdimensionen aus Naturkonstanten

Das Internationale Einheitensystem SI wurde im Jahre 2019 auf Basis von Naturkonstanten neu definiert. Zeigen Sie, dass die 6 Naturkonstanten: Strahlungsfrequenz Cäsium-Atom, Lichtgeschwindigkeit, Plancksches Wirkungsquantum, Elementarladung, Boltzmann-Konstante und Avogadro-Konstante ausreichen, um die Basiseinheiten (außer dem Candela) zu definieren.

Zum Hinweis

2 Hinweise

2.a Einheiten und SI

Hinweis[2] zu **Aufgabe 2 „Symbole und Einheiten der Größen“**

Einige Lösungen finden Sie in Tabelle A.2 „Einige physikalische Größen, ihre Dimensionen, Symbole und SI-Einheiten:“. Für die Lösung von Stromgrößen benötigen Sie Definition 9.3.2 und für die Dichten lesen Sie Definition 9.2.6.

Zur Lösung

Hinweis[4] zu **Aufgabe 4 „Umrechnen von Einheiten“**

Verwenden Sie die Rezepte Rezept 2.2.10 und Rezept 2.2.11.

Zur Lösung

2.b Dimensionsanalyse

2.b.1 Basisaufgaben

Hinweis[5] zu **Aufgabe 5 „Dimensionsanalyse“**

Nutzen Sie die Regeln aus Wissen 2.4.1 „Grundlagen der Dimensionsanalyse“.

Zur Lösung

2.b.2 Für Fortgeschrittene

Hinweis[6] zu **Aufgabe 6 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse Feder Masse“**

Verwenden Sie Wissen 2.4.3 und Rezept 2.4.4. Hilfreich ist auch, wenn Sie Beispiel 2.4.iv durcharbeiten.

Zur Lösung

Hinweis[7] zu **Aufgabe 7 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Ideales Gas“**

Verwenden Sie Wissen 2.4.3 und Rezept 2.4.4.

Zur Lösung

Hinweis[8] zu **Aufgabe 8 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse Pendeluhr“**

Führen Sie eine Dimensionsanalyse nach Rezept 2.4.5 durch.

Berücksichtigen Sie das Schwerefeld der Erde, die Pendellänge, die Pendelmasse und die Schwingungsdauer. Führen Sie zunächst eine Dimensionsanalyse durch.

Zur Berechnung kleiner Veränderungen können Sie Rezept 8.3.8 verwenden.

Zur Lösung

Hinweis[9] zu **Aufgabe 9 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Luftwiderstand - einfaches Modell“**

Verwenden Sie Rezept 2.4.5.

Zur Lösung

2.b.3 Für Experten

Hinweis[10] zu **Aufgabe 10 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Luftwiderstand - mit Viskosität“**

Die kinematische Viskosität ν hat die Dimension $\dim \nu = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$.

Zur Lösung

2.c Basissystem Definition aus Naturkonstanten

Hinweis[11] zu **Aufgabe 11 „Basisdimensionen aus Naturkonstanten“**

Betrachten Sie die exakten, da definierten, Naturkonstanten aus Tabelle A.4. Es sind genau 6 definierte Naturkonstanten und 6 benötigte Basisgrößen.

Zur Lösung

3 Lösungen

3.a Einheiten und SI

Lösung [1] zu **Aufgabe 1 „SI-Basisgrößen oder abgeleitete Größen?“**

SI-Basisgrößen sind: Stoffmenge, Masse.
Abgeleitete Größen sind: Alle anderen Größen der Liste.

Lösung [2] zu **Aufgabe 2 „Symbole und Einheiten der Größen“**

Größe	Symbol	Dimension	Einheit (SI)
Kraft:	$\vec{F}$	ablesen aus Tabelle A.2	
Impuls:	$\vec{p}$	ablesen aus Tabelle A.2	
Pot. Energie:	E_{pot}	ablesen aus Tabelle A.2	
Massenstromstärke:	$I_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$	$\dim I_m = \mathsf{MT}^{-1}$	$[I_m]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$
Entropie:	S	ablesen aus Tabelle A.2	
Massendichte:	$\rho_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$	$\dim \rho_m = \mathsf{ML}^{-3}$	$[\rho_m]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
el. Raumladungsdichte:	$\rho_q = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$	$\dim \rho_m = \mathsf{ITL}^{-3}$	$[\rho_q]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^3}$
Stoffmenge:	n	ablesen aus Tabelle A.2	
elektr. Ladung:	q	ablesen aus Tabelle A.2	
magn. Feldstärke:	$\vec{H}$	ablesen aus Tabelle A.2	
Druck:	p	ablesen aus Tabelle A.2	
kin. Energie:	E_{kin}	ablesen aus Tabelle A.2	
Frequenz:	f	ablesen aus Tabelle A.2	
Energiedichte:	$\rho_E = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V}$	$\dim \rho_E = \frac{\dim E}{\dim V} = \mathsf{MT}^2\mathsf{L}$	$[\rho_E]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}} = \mathrm{Pa}$
Masse:	m	ablesen aus Tabelle A.2	

Lösung [3] zu **Aufgabe 3 „Vektor oder Skalar?“**

Vektorgrößen sind: Kraft, Impuls, magnetische Feldstärke
Skalare Größen sind: potenzielle Energie, Massenstromstärke, Entropie, Massendichte, elektrische Raumladungsdichte, Stoffmenge, elektrische Ladung, Druck, kinetische Energie, Frequenz, Energiedichte, Masse.

Lösung 4 zu Aufgabe 4 „Umrechnen von Einheiten“

a) $3{,}21\,\mathrm{km} = 3{,}21\,\cancel{\mathrm{km}} \cdot \frac{10^3\,\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{km}}} \cdot \frac{10^2\,\mathrm{cm}}{\cancel{\mathrm{m}}} = 3{,}21 \cdot 10^5\,\mathrm{cm}$

b) $4\,\mathrm{m}^2 = 4\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\frac{10^3\,\mathrm{mm}}{\mathrm{m}}\right)^2 = 4\,\cancel{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{10^6\,\mathrm{mm}^2}{\cancel{\mathrm{m}^2}} = 4 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^2$

c) $0{,}0022\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-3}\,\frac{\cancel{\mathrm{kN}}}{\cancel{\mathrm{cm}^2}} \cdot \frac{10\,\mathrm{hN}}{\cancel{\mathrm{kN}}} \cdot \frac{10^4\,\cancel{\mathrm{cm}^2}}{\mathrm{m}^2} = 2{,}2 \cdot 10^2\,\mathrm{hPa}$

d) Die Ausgangsgröße hat die Einheit Nm, also eine Kraft mal ein Weg. Damit hat sie die Dimension $\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}}$. Die Zieleinheit ist kW; sie gehört zur Dimension $\mathsf{M\,L^2\,T^{-3}}$. Die Dimensionen sind unterschiedlich. Diese Umrechnung ist nicht möglich.

e) $32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 32\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot \frac{\mathrm{mi}}{1{,}6 \cdot 10^3\,\cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{3{,}6 \cdot 10^3\,\cancel{\mathrm{s}}}{\mathrm{h}} = 72\,\frac{\mathrm{mi}}{\mathrm{h}}$

f) $540\,\mathrm{MJ} = 540 \cdot 10^3\,\mathrm{kJ} = 540 \cdot \cancel{10^3}\,\mathrm{kW}\,\cancel{\mathrm{s}} \cdot \frac{\mathrm{h}}{3{,}6 \cdot \cancel{10^3}\,\cancel{\mathrm{s}}} = 150\,\mathrm{kWh}$

g) $10\,\mathrm{W} = 10\,\frac{\cancel{\mathrm{J}}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot \frac{\mathrm{kJ}}{\cancel{10^3}\,\cancel{\mathrm{J}}} \cdot \frac{3{,}6 \cdot \cancel{10^3}\,\cancel{\mathrm{s}}}{\mathrm{h}} = 36\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{h}}$

h) $2700\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{m}^3} = 2{,}7 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{10^2\,\mathrm{cm}}\right)^3 = 2{,}7 \cdot \cancel{10^6}\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{m}^3}} \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m}^3}}{\cancel{10^6}\,\mathrm{cm}^3} = 2{,}7\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{cm}^3}$

3.b Dimensionsanalyse

3.b.1 Basisaufgaben

Lösung 5 zu Aufgabe 5 „Dimensionsanalyse“

a) Gegeben war

$$F = \Psi \cdot m + \Omega.$$

mit der Kraft F und der Masse m.

Daraus ergibt sich:

- $\dim(\Psi)$:
$$\dim(\Psi) \cdot \mathsf{M} = \dim(F)$$
$$\Leftrightarrow \quad \dim(\Psi) = \frac{\dim(F)}{\mathsf{M}} = \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{T}^2} \qquad [\Psi]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
- $\dim(\Omega)$:
$$\dim(\Omega) = \dim(F) = \frac{\mathsf{M\,L}}{\mathsf{T}^2} \qquad [\Omega]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) Ein Vergleich mit der vorigen Teilaufgabe zeigt: im ersten Summanden muss θ die Dimension $\frac{\mathsf{L}}{\mathsf{T}^2}$ haben, im zweiten Summanden aber $\frac{\mathsf{M\,L}}{\mathsf{T}^2}$. Eine physikalische Größe (hier θ) hat aber eine eindeutige Dimension. Diese Gleichung ist also zwingend fehlerhaft.

c) Gegeben war

$$I_q = \theta \cdot \cos(\Omega \cdot t^2) - \frac{\phi}{t}$$

mit der elektrischen Stromstärke I_q und der Zeit t.

Daraus ergibt sich:

- $\dim(\theta)$: $\quad \dim(\theta) = \dim(I_q) = \mathsf{I} \qquad [\theta]_{\mathrm{SI}} = [I_q]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{A}$ (Ampère)
- $\dim(\Omega)$: $\quad \dim(\Omega) \cdot \mathsf{T}^2 = 1$
  $\Leftrightarrow \quad \dim(\Omega) = \mathsf{T}^{-2} \qquad [\Omega]_{\mathrm{SI}} = \frac{1}{\mathrm{s}^2}$
- $\dim(\phi)$: $\quad \frac{\dim(\phi)}{\mathsf{T}} = \mathsf{I}$
  $\Leftrightarrow \quad \dim(\phi) = \mathsf{I}\,\mathsf{T} \qquad [\phi]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{A\,s}$

d) Gegeben war

$$P = 28\; s\; \Psi\; \log_{10}\left(\frac{5\,\Omega}{T}\right) - F\,\vartheta - 2\sqrt{\frac{\Phi}{A}}$$

mit der Energiestromstärke (Leistung) P, dem Weg s, der Temperatur T, der Kraft F und der Fläche A.

Die Faktoren 28 und 5 und 2 sind für die Dimensionsanalyse irrelevant!

Zur Vorbereitung klären wir aus der Definition der Leistung die Dimension der Leistung:

- Die Leistung P ist die pro Zeit Δt verrichtete Arbeit ΔW.
- Die Arbeit ΔW ist Kraft F multipliziert mit Weg Δs.

Somit gilt:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F\,\Delta s}{\Delta t}$$

und P hat die Dimension:

$$\dim(P) = \frac{\mathsf{M}\,\mathsf{L}\cdot\mathsf{L}}{\mathsf{T}^2\cdot\mathsf{T}} = \frac{\mathsf{M}\,\mathsf{L}^2}{\mathsf{T}^3}.$$

Daraus ergibt sich:

- $\dim(\Psi)$: $\quad \dim(\Psi)\cdot\mathsf{L} = \dim(P)$
  $\Leftrightarrow \quad \dim(\Psi) = \frac{\dim(P)}{\mathsf{L}} = \frac{\mathsf{M}\,\mathsf{L}^2}{\mathsf{T}^3\,\mathsf{L}} = \frac{\mathsf{M}\,\mathsf{L}}{\mathsf{T}^3} \qquad [\Psi]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^3}$
- $\dim(\Omega)$: $\quad \frac{\dim(\Omega)}{\mathsf{\Theta}} = 1$
  $\Leftrightarrow \quad \dim(\Omega) = \mathsf{\Theta} \qquad [\Omega]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{K}$ (Kelvin)
- $\dim(\vartheta)$: $\quad \dim(F)\cdot\dim(\vartheta) = \dim(P)$
  $\Leftrightarrow \quad \dim(\vartheta) = \frac{\dim(P)}{\dim(F)} = \frac{\mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^2}{\mathsf{T}^3\,\mathsf{M}\,\mathsf{L}} = \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{T}} = \mathsf{L}\mathsf{T}^{-1} \qquad [\vartheta]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- $\dim(\Phi)$: $\quad \sqrt{\frac{\dim(\Phi)}{\dim(A)}} = \dim(P)$
  $\Leftrightarrow \quad \dim(\Phi) = \dim(A)\cdot\dim(P^2) = \frac{\mathsf{L}^2\,\mathsf{M}^2\,\mathsf{L}^4}{\mathsf{T}^6}$
  $= \frac{\mathsf{M}^2\,\mathsf{L}^6}{\mathsf{T}^6} = \mathsf{M}^2\,\mathsf{L}^6\,\mathsf{T}^{-6} \qquad [\Phi]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg}^2\,\mathrm{m}^6}{\mathrm{s}^6}$

3.b.2 Für Fortgeschrittene

Lösung 6 zu **Aufgabe 6 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse Feder Masse“**

Größe	Dimension
T	T
m	M
s	L
D	$\mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-2}$

Nachdem man die Tabelle mit den beteiligten Größen erstellt hat, zählt man die vorkommenden Dimensionen. Man erkennt, dass sowohl die Dimension Zeit und die Masse genau zweimal vorkommen. Damit lassen sich sofort folgende Zusammenhänge ablesen:

zu kürzende Dimension	Zusammenhang der Größen
T	$T^2\,D$
M	$\frac{D}{m}$
L	?

Offensichtlich findet man keinen Zusammenhang zwischen den Größen der es erlaubt, die Dimension L der Auslenkung zu kürzen. Daraus kann man folgern: Die Periodendauer des Pendels ist unabhängig von der Auslenkung! Eine tolle, wertvolle Erkenntnis!

Damit sind alle beteiligten Größen berücksichtigt und es ergibt sich:

$$\frac{T^2\,D}{m} = k$$

und somit:

$$T \propto m^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad T \propto D^{-\frac{1}{2}}.$$

Lösung 7 zu **Aufgabe 7 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Ideales Gas“**

a) Dimension der Gaskonstanten R:

$$\dim(R) = \frac{\mathsf{M}\,\mathsf{L}^2}{\mathsf{T}^2\,\mathsf{N}\,\Theta}.$$

b) $V(p, T, n, R)$:

Dimensionen aus Tabelle A.2:

Größe		Dimension
Druck	p	$\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{L}\,\mathsf{T}^2} = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}$
Volumen	V	L^3
Stoffmenge	n	N
Temperatur	T	Θ
Gaskonstante	R	$\frac{\mathsf{M}\,\mathsf{L}^2}{\mathsf{T}^2\,\mathsf{N}\,\Theta}$

Damit ergibt sich

$$\dim\left(\frac{p\,V}{n\,R\,T}\right) = 1$$

als einzig mögliche dimensionslose Kombination.

Daraus ergibt sich für das Volumen V eines Gases:

$$V = k\,\frac{n\,R\,T}{p}.$$

Der Zahlenfaktor k kann nicht aus der Dimensionsanalyse bestimmt werden.

L8 Lösung zu Aufgabe 8 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse Pendeluhr"

Zu berücksichtigen sind:

Größe		Dimension
Schwerefeld	g	$\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$
Pendellänge	ℓ	L
Masse	m	M
Schwingungsdauer	T	T

Man erkennt, dass die Masse entweder nicht in die Gleichung eingeht, oder eine Größe vergessen wurde. Wenn Sie aber keine relevanten Größen finden, die die Dimension Massen enthalten, können Sie mit den restlichen Größen weiterarbeiten. Als dimensionslosen Ausdruck erhält man:

$$\frac{T^2\,g}{\ell} = k$$

und damit

$$T^2 \propto \ell.$$

Aus der Betrachtung kleiner Änderungen (Rezept 8.3.8) ergibt sich:

$$2\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

und damit

$$\Delta\ell = \frac{2\,\Delta T\,\ell}{T} = \frac{2\cdot\cancel{5}\,\mathrm{min}\cdot\cancel{5}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}}{\cancel{24}\cdot 60\,\mathrm{min}} \approx \frac{2}{600}\,\mathrm{m} \approx 3{,}3\,\mathrm{mm}.$$

Müssen Sie das Pendel verlängern oder kürzen?

L9 Lösung zu Aufgabe 9 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Luftwiderstand - einfaches Modell"

Einflussfaktoren auf die Luftwiderstandskraft sind

- die Querschnittsfläche des Körpers A,
- die Geschwindigkeit des Körpers v und
- die Dichte der Luft ϱ_{Luft}.

Tabelle der Einflussfaktoren und ihre Dimension:

Variable	Dimension
F_{LW}	$\mathsf{M\,L\,T}^{-2}$
A	L^2
v	$\mathsf{L\,T}^{-1}$
ϱ	$\mathsf{M\,L}^{-3}$

In diesem Problem gibt es 4 Variablen und 3 unabhängige Dimensionen, was bedeutet, dass es nur einen dimensionslosen Ausdruck gibt. Zum suchen dieses Ausdrucks setzten Sie die gesucht Größe in den Zähler, und eliminieren zuerst die Dimensionen, die nur zwei Mal vorkommen:

$$\dim\left(\frac{F_{LW}}{}\right) = \frac{\mathsf{M\ L}}{\mathsf{T}^2} \overset{!}{=} 1$$
$$\dim\left(\frac{F_{LW}}{\varrho}\right) = \frac{\cancel{\mathsf{M}}\ \mathsf{L}\ \mathsf{L}^3}{\mathsf{T}^2\ \cancel{\mathsf{M}}} \overset{!}{=} 1$$
$$\dim\left(\frac{F_{LW}}{\varrho\ v^2}\right) = \frac{\cancel{\mathsf{M}}\ \cancel{\mathsf{L}}\ \overset{\mathsf{L}^2}{\cancel{\mathsf{L}^3}}\ \cancel{\mathsf{T}^2}}{\cancel{\mathsf{T}^2}\ \cancel{\mathsf{M}}\ \cancel{\mathsf{L}^2}} \overset{!}{=} 1$$
$$\dim\left(\frac{F_{LW}}{\varrho\ v^2\ A}\right) = \frac{\cancel{\mathsf{M}}\ \cancel{\mathsf{L}}\ \overset{\cancel{\mathsf{L}^2}}{\cancel{\mathsf{L}^3}}\ \cancel{\mathsf{T}^2}}{\cancel{\mathsf{T}^2}\ \cancel{\mathsf{M}}\ \cancel{\mathsf{L}^2}\ \cancel{\mathsf{L}^2}} = 1$$

Wir erhalten folgenden Zusammenhang:

$$F_{LW} = k\,\varrho\,A\,v^2,$$

mit einem unbekannten dimensionslosen Vorfaktor k. Bei diesem Faktor handelt es sich im Wesentlichen um den c_w-Wert: $c_w = 2\,k$.

3.b.3 Für Experten

Lösung 10 zu **Aufgabe 10 „Fortgeschrittene Dimensionsanalyse: Luftwiderstand - mit Viskosität“**

a) Durch den zusätzlichen Einflussfaktor

Größen	Dimension
F_{LW}	$\mathsf{M\,L\,T}^{-2}$
A	L^2
v	$\mathsf{L\,T}^{-1}$
ϱ	$\mathsf{M\,L}^{-3}$
ν	$\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$

5 – 3 $\Rightarrow$ 2 dimensionslose Ausdrücke

benötigen wir 2 dimensionslose Ausdrücke, um das Problem zu beschreiben. Wir können den dimensionslosen Ausdruck aus Aufgabe 9 nehmen, und noch einen zweiten suchen, der die Viskosität enthält. Es ist geschickt, wenn dieser Ausdruck die Gesuchte Größe F_{LW} nicht enthält, weil wir sonst die Formel nicht auflösen können. Damit bleiben nur noch die Querschnittsfläche A und die Geschwindigkeit v:

$$\dim\left(\frac{\nu}{v\,\sqrt{A}}\right) = \frac{\mathsf{L}^2\ \mathsf{T}}{\mathsf{T\,L\,L}} = 1.$$

Aus der Dimensionsanalyse bekommen wir folgenden Zusammenhang mit einer unbekannten Funktion $f(x)$, deren einziges Argument der Zahlenwert des zweiten dimensionslosen Ausdrucks ist:

$$F_{LW} = \varrho\, A\, v^2\ f\left(\frac{\nu}{v\sqrt{A}}\right).$$

b) In der gefundenen Gleichung für den Luftwiderstand ist die einzige Unbekannte die dimensionslose Funktion $f(x)$. Diese möchte man mit Hilfe des Modells ausmessen:

$$f(x) = f\left(\frac{\nu}{v\sqrt{A}}\right) = \frac{F_{LW}}{\varrho\, A\, v^2}$$

Wenn man also im Windkanal mit dem gleichen Parameter misst, mit dem auch das Originalauto unterwegs ist, kann man den Luftwiderstand berechnen.

Damit der Wert des dimensionslosen Ausdrucks $x = \frac{\nu}{v\sqrt{A}}$ gleich bleibt, obwohl die Querschnittsfläche des Modells reduziert ist, muss die Geschwindigkeit entsprechend erhöht werden. Die Viskosität lässt sich nicht so einfach anpassen.

Wenn das Modellauto nur halb so groß ist, ist die Querschnitssfläche $1/4$ mal so groß

$$\sqrt{A_{Modell}} = \sqrt{1/4\, A} = 1/2\, \sqrt{A}.$$

Wenn man die Geschwindigkeit also verdoppelt, ist der dimensionslose Faktor für das Modell wieder gleichgroß wie im Original.

3.c Basissystem Definition aus Naturkonstanten

L11 Lösung zu Aufgabe 11 „Basisdimensionen aus Naturkonstanten“

Zuerst werden die Dimensionen zu den Naturkonstanten geschrieben.

Name	Zeichen	Wert	Dimension
Lichtgeschwindigkeit	c	$= 2{,}99792458 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	$\mathsf{L\,T^{-1}}$
Plancksche Konstante	h	$= 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}\,(\text{Teilchen}^{-1})$	$\mathsf{M\,L^2\,T^{-1}\,(N^{-1})}$
Elementarladung	e	$= 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\,(\text{Teilchen}^{-1})$	$\mathsf{I\,T\,(N^{-1})}$
Boltzmann Konstante	k	$= 1{,}380649 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}\,(\text{Teilchen}^{-1})$	$\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}\,\Theta^{-1}\,(N^{-1})}$
Avogadrokonstante	N_A	$= 6{,}02214076 \cdot 10^{23}\,(\text{Teilchen})\,\mathrm{mol^{-1}}$	N
Cäsiumfrequenz	f_{Cs}	$= 9{,}192631770 \cdot 10^9\ \mathrm{s^{-1}}$	$\mathsf{T^{-1}}$

Man erkennt, dass einige Naturkonstanten sehr direkt zu den Einheiten führen. Dazu wird die Gleichung zwischen Variablenzeichen und Wert nach der Einheit aufgelöst. Wir können aber genausogut eine dimensionslose Konstante zwischen der Basisgröße und den Naturkonstanten suchen.

Es gibt 6 unabhängige dimensionslose Konstanten zwischen den Basisgrößen ℓ, t, m, I, T und N und den Naturkonstanten.

- Zeit t
  Dimensionslose Konstante: $t \cdot f_{\mathrm{Cs}}$

  $$[t]_{\mathrm{SI}} = 1\,\mathrm{s} = \frac{9{,}192631770 \cdot 10^9}{f_{\mathrm{Cs}}}$$

  Das bedeutet, man betrachtet die Cäsiumfrequenz und wartet $9{,}192631770 \cdot 10^9$ Schwingungen ab. Dann ist genau eine Sekunde vergangen.

- Länge ℓ

  Dimensionslose Konstante: $\ell \cdot \frac{f_{\text{Cs}}}{c}$

  Dazu wird zunächst die Lichtgeschwindigkeit und die Cäsiumfrequenz durcheinander dividiert, danach nach der Einheit „Meter“ aufgelöst.

  $\frac{c}{f_{\text{Cs}}} = \frac{2{,}99792458 \cdot 10^{8}\ \text{m}\,\cancel{\text{s}^{-1}}}{9{,}192631770 \cdot 10^{9}\ \cancel{\text{s}^{-1}}} \Rightarrow [\ell]_{\text{SI}} = 1\ \text{m} = \frac{9{,}192631770 \cdot 10^{9}}{2{,}99792458 \cdot 10^{8}}\ \frac{c}{f_{\text{Cs}}}$

  Das bedeutet man misst, wie weit Licht kommt, während einer Zeit von $\frac{9{,}192631770 \cdot 10^{9}}{2{,}99792458 \cdot 10^{8}} \approx 30$ Cäsiumschwingungen. Anders betrachtet beschreibt das Verhältnis $\frac{c}{f_{\text{Cs}}} = \lambda_{\text{Cs}}$ die Wellenlänge dieser Cäsium-Licht-Strahlung. Und etwa 30 dieser Wellenlängen ergeben dann einen Meter.

In beiden Fällen, für die Festlegung der Sekunde und des Meters, müssen wir Schwingungen zählen. Das geht mit sehr großer Präzision.

Mathematisch genauso leicht lassen sich die anderen SI-Grundeinheiten aus den Naturkonstanten ableiten. Allerdings macht bei der physikalischen Realisierung der Einheit die Pseudokonstante „Teilchen“ ein paar Probleme. Schauen wir das zunächst am einfachsten Fall an:

- Stoffmenge N

  Dimensionslose Konstante: $\frac{N}{N_A}$

  $[N]_{\text{SI}} = 1\ \text{mol} = \frac{6{,}02214076 \cdot 10^{23}\ (\text{Teilchen})}{N_A}$

  Hier müssen wir Teilchen zählen und das gestaltet sich meist recht schwierig. Für ein Mol benötigen wir $6{,}02214076 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Die Avogadrozahl ist eben leider keine Naturkonstante, die bei einem natürlichen Vorgang -wie beispielsweise dem oben verwendeten Cäsiumübergang- vorkommt.

Auch für die physikalische Realisierung des Ampères müssen Teilchen gezählt werden:

- Stromstärke I

  Dimensionslose Konstante: $\frac{I}{e\, f_{\text{Cs}}}$

  Dazu wird zunächst die Elementarladung und die Cäsiumfrequenz miteinander multipliziert, danach nach der Einheit „Ampere“ aufgelöst.

  $e\, f_{\text{Cs}} = 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}\ \text{A}\,\cancel{\text{s}}\,(\text{Teilchen}^{-1}) \cdot 9{,}192631770 \cdot 10^{9}\ \cancel{\text{s}^{-1}}$

  $\Rightarrow [I]_{\text{SI}} = 1\ \text{A} = \frac{(\text{Teilchen})}{1{,}602176634 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}192631770 \cdot 10^{9}}\ e\, f_{\text{Cs}}$

  Man zählt also wie viele einzelne Ladungsträger (definiert durch e) in einer gewissen Zeit (definiert durch f_{Cs}) fließen.

  https://www.ptb.de/cms/de/presseaktuelles/zeitschriften-magazine/ptb-news/ptb-news-ausgaben/archivederptb-news/ptb-news-2012-2/stromstaerke-normal-auf-einzelelektronen-basis-rueckt-naeher.html

Etwas anders sieht es aus für die Realisierung des Kelvin, obwohl auch hier zunächst die Pseudoeinheit Teilchen vorkommt.

- Temperatur T

  Dimensionslose Konstante: $T \cdot \frac{k}{h\, f_{\text{Cs}}}$

  Die Plancksche Konstante und die Cäsiumfrequenz werden miteinander multipliziert und durch die Bolzmannkonstante dividiert, danach nach der Einheit „Kelvin“ aufgelöst.

  $\frac{h\, f_{\text{Cs}}}{k} = \frac{6{,}62607015 \cdot 10^{-34}\ \cancel{\text{J}}\,\cancel{\text{s}}\,\cancel{(\text{Teilchen}^{-1})} \cdot 9{,}192631770 \cdot 10^{9}\ \cancel{\text{s}^{-1}}}{1{,}380649 \cdot 10^{-23}\ \cancel{\text{J}}\,\text{K}^{-1}\,\cancel{(\text{Teilchen}^{-1})}} = \text{konst} \cdot\ \text{K}$

  Wie bei den obigen Beispielen lässt sich das Kelvin nun aus den drei messbaren Naturkonstanten sowie den definierten Zahlenwerten bestimmen. Das Zählen von Teilchen ist nicht nötig, denn die Pseudoeinheit hat sich heraus gekürzt.

Die Herstellung eines Massenormals Kilogramm ist sehr aufwendig. Zwar ist auch hier die Rückführung auf Naturkonstanten mathematisch einfach, aber die Umsetzung anspruchsvoll.

- Masse m

  Dimensionslose Konstante: $m \cdot \dfrac{c^2}{h\, f_{\mathrm{Cs}}}$

  Eine Möglichkeit ist die sogenannte Wattwaage. Dabei werden mit einer Spule mit der Masse m in einem Magnetfeld zwei unterschiedliche Messungen durchgeführt. Einmal lässt man einen elektrischen Strom durch die Spule fließen. Die Stromstärke wird solange verändert, bis die Spule im Magnetfeld schwebt. Die dazugehörige Stromstärke I wird gemessen.

  Im zweiten Teil des Versuchs wird die gleiche Spule im Magnetfeld bewegt. Dabei wird eine Spannung U induziert. Diese wird gemessen. Zudem misst man die Bewegungsgeschwindigkeit v und die Stärke des Schwerefeldes g an der Stelle der Spule. Daraus ergibt sich:

  $$m\, g\, v = U\, I$$

  Die vier Messgrößen lassen sich auf Naturkonstanten zurückführen, also als Vielfaches der Naturkonstanten messen. Zur Vereinfachung der Idee werden diese dimensionslose Zahlen hier mit α bezeichnet und mit einem Index versehen:

Größe	Symbol	Naturkonstanten	Dimension	
Schwerefeld	g	$= \alpha_g \cdot c\, f_{\mathrm{Cs}}$	$\mathsf{LT}^{-1} \cdot \mathsf{T}^{-1}$	$= \mathsf{LT}^{-2}$
Geschwindigkeit	v	$= \alpha_v \cdot c$		$= \mathsf{LT}^{-1}$
Elektrische Spannung	U	$= \alpha_U \cdot \dfrac{h\, f_{\mathrm{Cs}}}{e}$	$\dfrac{\mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-1}(\mathsf{N}^{-1}) \cdot \mathsf{T}^{-1}}{\mathsf{I}\,\mathsf{T}(\mathsf{N}^{-1})}$	$= \mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-3}\mathsf{I}^{-1}$
elektrische Stromstärke	I	$= \alpha_I \cdot e\, f_{\mathrm{Cs}}$	$\mathsf{IT}(\mathsf{N}^{-1}) \cdot \mathsf{T}^{-1}$	$= \mathsf{I}(\mathsf{N}^{-1})$

  Für die Stromstärkemessung muss man Teilchen zählen, wie wir oben schon gesehen haben.